

9

Exponentiële verbanden

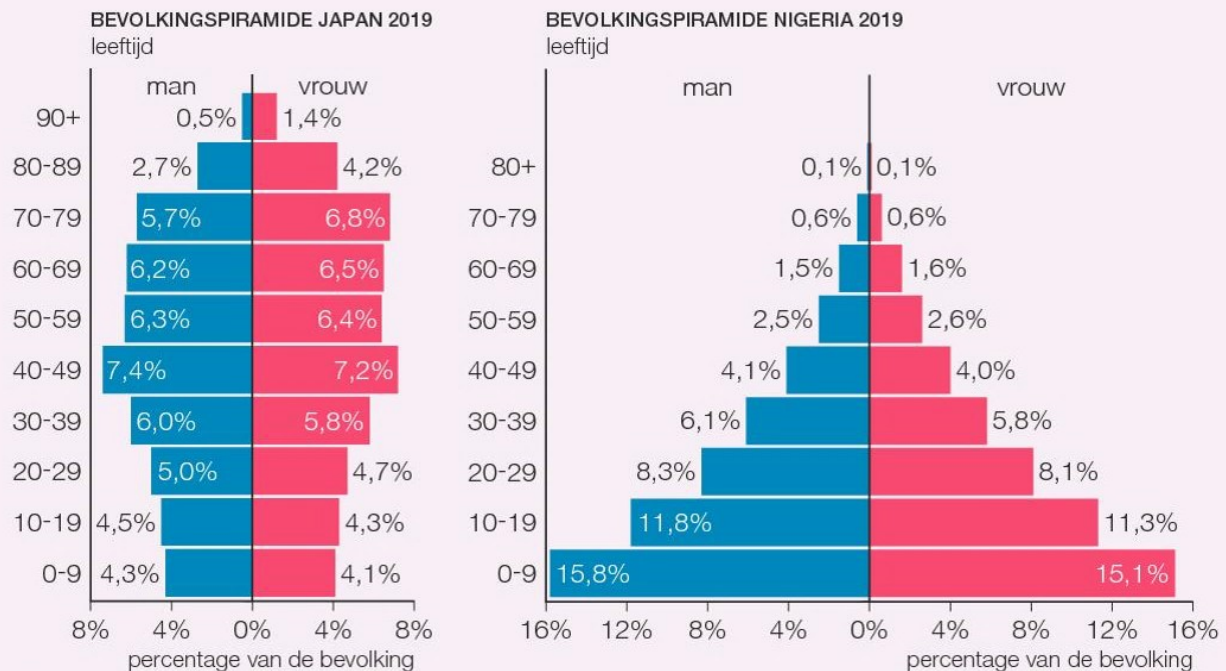
Wat leer je?

- Werken met formules van lineaire en exponentiële groei.
- Rekenen met groeifactoren en groeipercentages.
- Wat verdubbelingstijd en halveringstijd is.
- Hoe je formules opstelt bij exponentiële groei.
- Wat logaritmisch papier is.
- Redeneren met groeiformules.



Beginopdracht Bevolkingspiramiden Japan en Nigeria

In januari 2019 had Japan 125 miljoen inwoners en Nigeria 202 miljoen. In de figuren hieronder zie je dat er een groot verschil is tussen de bevolkingspiramide van Japan en die van Nigeria.



figuur 9.1

- Hoe kun je in deze bevolkingspiramiden zien dat de bevolking van Japan waarschijnlijk zal krimpen en die van Nigeria flink zal toenemen?

We bekijken in deze opdracht de leeftijdscategorieën 0-19 jaar, 20-39 jaar, 40-59 jaar, 60-79 jaar en 80+. We nemen aan dat alleen de vrouwen in de leeftijdscategorie 20-39 jaar kinderen krijgen. Verder nemen we aan dat alle mensen in de leeftijdscategorie 80+ twintig jaar later zijn overleden en dat van de mensen in de leeftijdscategorie 60-79 jaar twintig jaar later 80% is overleden.

In Japan is het vruchtbaarheidscijfer 1,44. Dat betekent dat er gemiddeld 1,44 kinderen per vrouw in de leeftijdscategorie 20-39 jaar geboren worden. In Nigeria is het vruchtbaarheidscijfer 5,53.

Uit deze vruchtbaarheidscijfers en de genoemde aannamen volgt dat de bevolking van Japan inderdaad over twintig jaar zal zijn gekrompen en dat de bevolking van Nigeria flink zal zijn toegenomen.

- Toon dat aan met berekeningen.
- Onderzoek met een soortgelijke berekening of de bevolking van Japan ook zou krimpen als het vruchtbaarheidscijfer 2,5 zou zijn.
- Onderzoek bij welk vruchtbaarheidscijfer het aantal inwoners van Nigeria op 1 januari 2039 gelijk zou zijn aan het aantal inwoners op 1 januari 2019.

Voorkennis Formules op de GR

Theorie A Snijpunten en toppen

Met de optie snijpunt vind je de coördinaten van snijpunten van grafieken. Met de opties maximum en minimum vind je de coördinaten van toppen van grafieken.

Bij het plotten van grafieken krijg je te maken met het kiezen van een geschikt venster. Vaak volgt uit de context wat geschikte waarden van x en y zijn. Ook kun je soms aan de formule zien welke waarden van x en y je het beste kunt kiezen.

In het voorbeeld is bij de formules $N_1 = 20 \cdot 1,2^t$ en $N_2 = 9t + 45$ met $t \geq 0$ geen context gegeven. Je kunt voor het venster bijvoorbeeld beginnen met x tussen 0 en 20.

Voor $t = 0$ krijg je $N_1 = 20 \cdot 1,2^0 = 20$ en

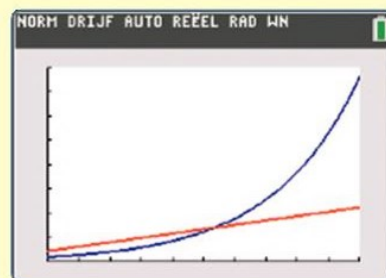
$N_2 = 9 \cdot 0 + 45 = 45$.

Voor $t = 20$ krijg je $N_1 = 20 \cdot 1,2^{20} \approx 767$ en

$N_2 = 9 \cdot 20 + 45 = 225$.

Neem dus voor het venster y tussen 0 en 800.

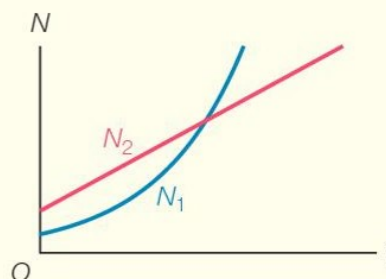
Je krijgt het scherm hiernaast. Het snijpunt is hier goed te zien, maar soms is het nodig om het venster nog aan te passen.



Voorbeeld

Gegeven zijn de formules $N_1 = 20 \cdot 1,2^t$ en $N_2 = 9t + 45$ met $t \geq 0$. Zie de schets hiernaast.

- Vanaf welke t is N_1 groter dan N_2 ? Rond af op één decimaal.
- Voor welke waarde van t is $N_2 - N_1$ maximaal? Hoeveel is deze maximale waarde? Rond af op één decimaal.



Uitwerking

- Voer in $y_1 = 20 \cdot 1,2^x$ en $y_2 = 9x + 45$.

De optie snijpunt geeft $x = 10,736...$

Dus vanaf $t = 10,8$ is $N_1 > N_2$.

- $N_2 - N_1 = 9t + 45 - 20 \cdot 1,2^t$

Voer in $y_3 = 9x + 45 - 20 \cdot 1,2^x$.

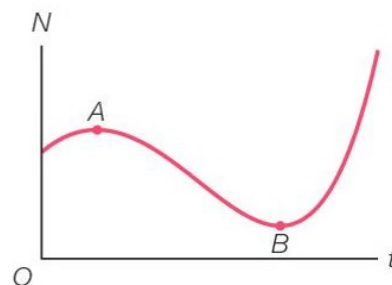
De optie maximum bij y_3 geeft $x \approx 5,0$ en $y \approx 40,2$.

Dus $N_2 - N_1$ is maximaal voor $t = 5,0$. De maximale waarde is 40,2.

- 1** Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.
- a** In voorbeeld a is het antwoord ‘vanaf $t = 10,8$ ’ terwijl de optie snijpunt $x = 10,736\dots$ geeft.
Hoe zit dat?
 - b** Vanaf welke t is $N_1 > 100$? Rond af op één decimaal.

- 2** Gegeven zijn de formules $N_1 = 15 \cdot 0,8^t$ en $N_2 = 12 - t$ met $t \geq 0$.
- a** Schets de grafieken van N_1 en N_2 in één figuur.
 - b** Voor welke t is $N_1 = N_2$? Rond af op twee decimalen.
 - c** Vanaf welke gehele t is $N_1 < 0,5$?
 - d** Voor welke waarde van t is $N_2 - N_1$ maximaal? Hoeveel is dit maximum? Rond af op één decimaal.

- 3** In de figuur hiernaast zie je de grafiek van $N = 5 \cdot 1,4^t - t^2$ met $t \geq 0$.
- a** Bereken de coördinaten van de toppen A en B . Rond af op één decimaal.
 - b** Bereken voor welke t de waarde van N kleiner is dan 4. Rond af op één decimaal.



figuur 9.2

9.1 Lineaire en exponentiële groei



Het aantal gecertificeerde biologische bedrijven in Nederland neemt jaarlijks met 235 toe.

Op 31 december 2011 waren er 3410 van deze bedrijven in Nederland.

a Hoeveel van deze bedrijven waren er op 31 december 2018?

De oppervlakte in Nederland waarop biologische landbouw plaatsvindt (het bio-areaal) wordt elk jaar 1,065 keer zo groot. Op 31 december 2015 was deze oppervlakte 59 120 hectare.

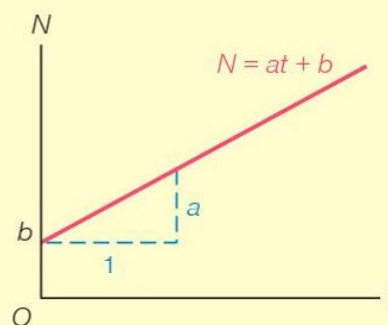
b Hoeveel hectare bio-areaal was er in Nederland op 31 december 2018?

Theorie A Formules bij lineaire en exponentiële groei

In opgave 1 heb je gezien dat het aantal gecertificeerde biologische bedrijven in Nederland elk jaar met 235 toeneemt. Je hebt te maken met **lineaire groei**.

Bij lineaire groei

- neemt de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde getal toe
- hoort een formule van de vorm $N = at + b$, waarin a de toename per tijdseenheid is en b de beginwaarde (of beginhoeveelheid)
- is de grafiek een rechte lijn.



Voorbeeld

De hoeveelheid N groeit lineair. Op $t = 5$ is $N = 130$ en op $t = 8$ is $N = 190$. Stel de formule op van N .

Uitwerking

$$N = at + b \text{ met } a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{190 - 130}{8 - 5} = 20$$

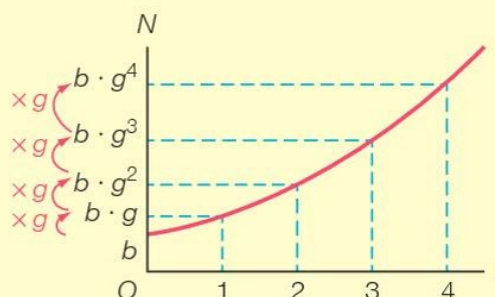
$$\left. \begin{array}{l} N = 20t + b \\ t = 5 \text{ en } N = 130 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 20 \cdot 5 + b = 130 \\ 100 + b = 130 \\ b = 30 \end{array}$$

Dus $N = 20t + 30$.

In opgave 1 heb je ook gezien dat het bio-areaal jaarlijks 1,065 keer zo groot wordt. Dit is een voorbeeld van **exponentiële groei**. Het getal waarmee telkens wordt vermenigvuldigd, heet de groeifactor. Hier is de groeifactor 1,065 per jaar. De beginwaarde (of beginhoeveelheid) is de waarde op $t = 0$.

Bij exponentiële groei

- wordt de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde getal (de groeifactor) vermenigvuldigd
- hoort een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$, waarin b de beginwaarde (of beginhoeveelheid) is en g de groeifactor per tijdseenheid.



In de formule $N = 800 \cdot 0,85^t$ herken je

- de beginhoeveelheid is 800
- de groeifactor per tijdseenheid is 0,85.

Groeifactor tussen 0 en 1, dus N neemt af.

Voor $t = 5$ is $N = 800 \cdot 0,85^5 \approx 355$.

Voorbeeld

De populariteit van de OV-fiets groeit al jaren. In juni 2016 werden er 215 000 ritten met de OV-fiets gemaakt. Dit aantal wordt sindsdien elke maand 1,02 keer zo groot. We nemen aan dat deze groei nog een tijdje aanhoudt.

- Stel de formule op van het aantal ritten met de OV-fiets per maand. Neem het aantal ritten R in duizendtallen en de tijd t in maanden waarbij $t = 0$ juni 2016 is.
- In welke maand van welk jaar was het aantal ritten voor het eerst meer dan 400 000?
- Volgens de formule zal het aantal ritten in december 2023 meer zijn dan in januari 2023. Hoeveel meer?

Uitwerking

- $R = b \cdot g^t$ met $b = 215$ en $g = 1,02$ geeft $R = 215 \cdot 1,02^t$.
- Los op $215 \cdot 1,02^t = 400$.
Voer in $y_1 = 215 \cdot 1,02^x$ en $y_2 = 400$. Neem x tussen 0 en 50 en y tussen 0 en 800.
De optie snijpunt geeft $x \approx 31,35$.
Dus bij $t = 32$ zal het aantal ritten voor het eerst meer zijn dan 400 000. Dat is in februari 2019.
- Bij januari 2023 hoort $t = 79$ en bij december 2023 hoort $t = 90$.
 $215 \cdot 1,02^{90} - 215 \cdot 1,02^{79} \approx 250,1$
De toename van het aantal ritten zal ongeveer 250 duizend zijn.



Zie het voorbeeld over de OV-fiets.

- Laat zien dat $t = 32$ bij de maand februari in 2019 hoort.
- In welke maand van welk jaar was het aantal ritten voor het eerst meer dan 500 000?

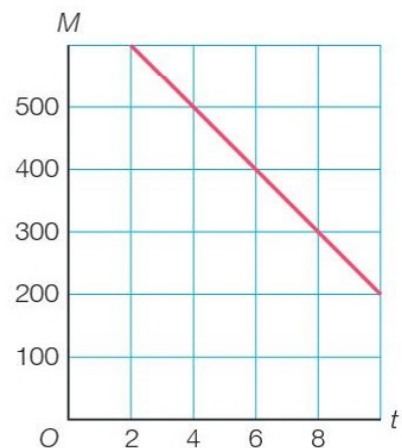
3

- a De hoeveelheid H groeit lineair. Op $t = 4$ is $H = 552$ en op $t = 10$ is $H = 600$.
Stel de formule op van H .
- b De hoeveelheid N neemt toe met een factor 1,075 per jaar. Op $t = 0$ is $N = 580$.
Stel de formule op van N met t in jaren.
- c De hoeveelheid M verandert elke dag met een factor 0,995 ten opzichte van de dag ervoor. Op $t = 0$ is $M = 8,4$.
Stel de formule op van M met t in dagen.

Aan het woord factor kun je zien dat je met een vermenigvuldiging te maken hebt.

4

- De hoeveelheid M neemt lineair af. Zie figuur 9.3.
Stel de formule op van M .



figuur 9.3

5

- Een hoeveelheid N groeit exponentieel. Op $t = 0$ is $N = 400$ en op $t = 1$ is $N = 434$.
Stel de formule op van N .

6

- Bij het zuiveren van afvalwater gebruikt men het begrip biochemisch zuurstofverbruik (BZV) als maat voor de verontreiniging van het water met organisch materiaal. In deze opgave gaan we uit van huishoudelijk afvalwater met een BZV van 300 mg/liter. Hoe schoner het water, des te lager het BZV.
- In het laboratorium van de zuiveringsinstallatie gaat men ervan uit dat de BZV met een factor 0,845 per dag afneemt.
- a Stel de formule op van het BZV van huishoudelijk afvalwater na t dagen zuiveren.
- b Hoeveel neemt volgens de formule het BZV af in de eerste week van de zuivering?
- c Een laborant meet het BZV na 5 dagen zuiveren. Drie dagen later meet de laborant nogmaals het BZV. Uit de metingen blijkt dat in deze drie dagen het BZV met 60 mg/liter is afgenomen.
Komt deze afname overeen met de afname die je verwacht op basis van de formule?

7

- Gegeven is de volgende tabel. Hierin is t de tijd in uren.

t	3	7	10	15
N	24,82	24,18	23,7	22,9

- a Toon aan dat de tabel bij een lineair verband hoort.
- b Stel de formule op van N .

8
□ ⊗ *

Het gebruik van kunstmest neemt wereldwijd toe met een factor 1,018 per jaar. In 2015 was het gebruik 190 miljoen ton. In Europa wordt juist steeds minder kunstmest gebruikt. In 2015 werd in Europa nog 15,65 miljoen ton gebruikt en sindsdien neemt deze hoeveelheid elk jaar met 20000 ton af.

- Hoeveel procent van de totale hoeveelheid gebruikte kunstmest in 2015 werd in Europa gebruikt?
- Stel de formule op van de hoeveelheid kunstmest die jaarlijks wereldwijd wordt gebruikt. Neem de hoeveelheid K_W in miljoenen ton en de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2015.
- Stel de formule op van de hoeveelheid kunstmest die jaarlijks in Europa wordt gebruikt. Neem de hoeveelheid K_E in miljoenen ton en de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2015.
- Bereken hoeveel procent van de totale hoeveelheid gebruikte kunstmest in 2025 in Europa wordt gebruikt.

A9
□ ⊗ *

Ans en Bo doneren regelmatig hun haar aan de Haarstichting. Deze stichting gebruikt het haar om personen met kanker aan een pruik te helpen. Ga er in deze opgave van uit dat haar met een constante snelheid aangroeit. Ans en Bo zijn op 1 maart 2020 naar de kapper geweest. Bij Ans was de lengte op 1 april 6,4 cm en op 1 juli 9,1 cm. Bij Bo was de lengte op 1 april 6,3 cm en op 1 juli 9,6 cm.

- Stel formules op van de haarlengte L_A van Ans en L_B van Bo. Neem L_A en L_B in cm en de tijd t in maanden met $t = 0$ op 1 maart 2020.
- In welke maand is de haarlengte van Ans voor het eerst meer dan 11,5 cm?
- In welke maand van welk jaar is de haarlengte van Bo 2 cm meer dan de haarlengte van Ans?
- Voor de volgende donatie van het haar moet het haar langer zijn dan 25 cm. Ans en Bo willen weer tegelijk naar de kapper gaan. Bereken vanaf welke datum dat kan.

A10
□ ⊗ *

In Nederland neemt het aandeel hernieuwbare energie gestaag toe. In 2015 nam het gebruik van biomassa 3,89% van het totale energieverbruik voor zijn rekening. Dit aandeel neemt jaarlijks met 0,21 procentpunten toe, dus in 2016 was het aandeel 4,10%.

In 2015 was het aandeel van zonne-energie 0,25% van het totale energieverbruik. Dit percentage neemt exponentieel toe met een factor 1,35 per jaar.

Bereken het percentage van het totale energieverbruik dat in 2023 afkomstig is van biomassa en zonne-energie. Rond af op twee decimalen.



A11

*

Zie opgave 10. In Nederland was in 2015 het aandeel van hernieuwbare energie 5,74% van het totale energieverbruik. Behalve uit biomassa en zonne-energie komt hernieuwbare energie voornamelijk uit windenergie. Er is ook nog een klein gedeelte overig. Neem aan dat het aandeel dat afkomstig is uit windenergie en overig vanaf 2015 exponentieel groeit met een factor 1,13 per jaar.

De overheid heeft als doel dat 37% van het energieverbruik in 2030 uit hernieuwbare bronnen komt. Onderzoek met deze gegevens of dit doel gehaald wordt.



012

In de tabel is t de tijd in jaren en zijn M en N hoeveelheden.

- a** Licht toe dat M lineair toeneemt en stel de formule op van M .
b Licht toe dat N niet lineair toeneemt.

t	0	1	2	3	4	5
M	420	505	590	675	760	845
N	420	483	555	639	735	845

N neemt exponentieel toe, want N wordt per jaar steeds met hetzelfde getal vermenigvuldigd.

- c** Bereken deze factor in twee decimalen.
d Stel de formule op van N .

Theorie B Tabellen bij exponentiële groei

Nederland is een echt fietsland. Lag er in Nederland in 2000 nog ongeveer 20 000 km fietspad, in 2020 was dat toegenomen tot ongeveer 42 000 km. Zie de tabel.

LENGTE FIETSPADEN IN NEDERLAND

jaar	2000	2005	2010	2015	2020
aantal km	20 000	24 000	29 000	35 000	42 000



Om te weten te komen of hier bij benadering sprake is van exponentiële groei, bereken je bij de tabel vier quotiënten.

$$\frac{24\,000}{20\,000} = 1,2; \quad \frac{29\,000}{24\,000} \approx 1,21; \quad \frac{35\,000}{29\,000} \approx 1,21 \text{ en } \frac{42\,000}{35\,000} = 1,2$$

Elke vijf jaar is het aantal km met ongeveer 1,2 vermenigvuldigd. Er is dus sprake van exponentiële groei. De bijbehorende formule is $L = 20\,000 \cdot 1,2^t$ met L de lengte van de fietspaden in km en t de tijd in vijftallen jaren met $t = 0$ in 2000.

Werkschema: aantonen van exponentiële groei bij een tabel

- 1 Bereken voor even grote intervallen de quotiënten
$$\frac{\text{hoeveelheid aan het eind van het interval}}{\text{hoeveelheid aan het begin van het interval}}$$
- 2 Zijn de quotiënten bij benadering gelijk, dan mag je uitgaan van exponentiële groei.

- 13** De omzet van de webwinkels in Nederland maakt een stormachtige groei door. Zie de tabel.

OMZET NEDERLANDSE WEBWINKELS IN MILJARDEN EURO'S

jaar	2014	2015	2016	2017	2018
omzet O	13,84	16,07	18,72	21,65	25,02

- a Toon aan dat bij de tabel exponentiële groei hoort.
- b Stel de formule op van O . Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2014 en rond de groeifactor af op twee decimalen.
- c In 2023 heeft Nederland naar verwachting 17,6 miljoen inwoners. Hoeveel zal in dat jaar de omzet van de webwinkels per Nederlander zijn, aangenomen dat de groei van de omzet zich op dezelfde wijze voortzet?

- A14** De luchtdruk neemt af met de hoogte. Zie de tabel.

- a** Toon aan dat er sprake is van een exponentieel verband tussen de luchtdruk en de hoogte en stel de formule op van de luchtdruk P op een hoogte h . Neem daarbij P in hPa en h in kilometers.
- b** Een expeditie heeft op een hoogte van 7500 meter een kamp opgeslagen op de Mount Everest. Bereken de luchtdruk op die hoogte.

hoogte in meters	luchtdruk in hPa
0	1020
1000	903
2000	800
3000	708
4000	627



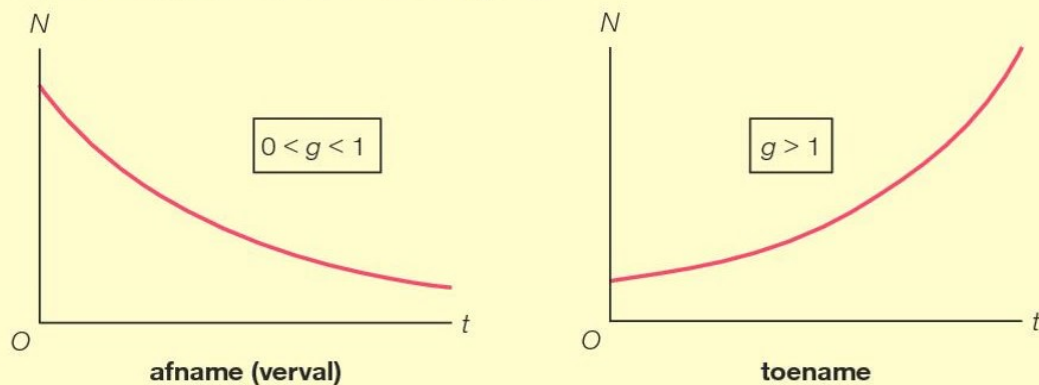
Gegeven zijn de formules $y_1 = 40 \cdot 1,05^x$ en $y_2 = 120 \cdot 0,92^x$.

- Plot de grafieken in één figuur. Neem x tussen 0 en 20 en y tussen 0 en 150.
- Welke soort van stijgen hoort bij de grafiek van y_1 ?
- Welke soort van dalen hoort bij de grafiek van y_2 ?
- Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken. Rond af op één decimaal.

Theorie C Grafieken bij exponentiële groei

Negatieve groeifactoren komen niet voor, maar de groeifactor kan wel kleiner dan 1 zijn. De hoeveelheid neemt dan af. Ook in deze gevallen spreken we van exponentiële groei, hoewel de uitdrukkingen 'exponentiële afname' en 'exponentieel verval' ook gebruikt worden.

Bij de grafiek van $N = b \cdot g^t$ kun je dus twee situaties onderscheiden: voor g tussen 0 en 1 is de grafiek afnemend dalend en voor g groter dan 1 is de grafiek toenemend stijgend.



figuur 9.4 Exponentieel verval en exponentiële toename.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $N = \frac{1000}{23 \cdot 1,4^t}$.

- Schrijf de formule van N in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond b af op één decimaal en g op drie decimalen.
- Welke soort van stijgen of dalen hoort bij de grafiek van N ? Licht toe.

Uitwerking

$$\text{a } N = \frac{1000}{23 \cdot 1,4^t} = \frac{1000}{23} \cdot 1,4^{-t} = \frac{1000}{23} \cdot (1,4^{-1})^t \approx 43,5 \cdot 0,714^t$$

Dus $N = 43,5 \cdot 0,714^t$.

- $g = 0,714$ dus de grafiek van N is afnemend dalend, want g tussen 0 en 1.

16

De volgende formules horen bij exponentiële groei.

Bereken de beginwaarde en de groeifactor. Rond de beginwaarde zo nodig af op gehele en de groeifactor op drie decimalen.

a $N = \frac{500}{10 \cdot 0,75^t}$

b $N = \frac{8050}{17 \cdot 1,24^t}$

c $N = \frac{650}{0,03 \cdot 4,15^t}$

d $N = \frac{300 \cdot 1,4^t}{1,3 \cdot 0,8^t}$

17

Zie de formules van opgave 16.

Noteer bij elke formule welke soort van stijgen of dalen bij de grafiek van N hoort. Licht je antwoorden toe.

A18

Gegeven zijn de formules $N_1 = 130 \cdot 1,075^t$, $N_2 = 450 \cdot 0,925^t$ en

$N_3 = N_1 + N_2$.

a Schets de grafieken van N_1 , N_2 en N_3 in één figuur.

b Welke soorten van stijgen en dalen herken je bij de grafiek van N_3 ?

Het snijpunt van de grafieken van N_1 en N_2 is A en de top van de grafiek van N_3 is het punt B .

c Onderzoek of de t -coördinaten van A en B gelijk zijn.

A19

Astmapatiënten kunnen geholpen worden door een injectie met het

medicijn theofylline. Dit medicijn wordt door de lever afgebroken.

Op $t = 0$ vindt een injectie plaats. De concentratie C van het medicijn in het bloed is dan 20 mg per liter. Per uur wordt de concentratie C met 0,8 vermenigvuldigd.

a Stel de formule op van de concentratie C na t uur.

b Schets de grafiek van C .

c Het medicijn is uitgewerkt als C minder dan 3 mg per liter is.

Na hoeveel uur is het medicijn uitgewerkt? Rond af op één decimaal.

d De daling van de concentratie is tussen $t = 3$ en $t = 4$ meer dan de daling tussen $t = 4$ en $t = 5$.

Hoeveel mg per liter scheelt het? Rond af op twee decimalen.

e Bereken de gemiddelde daling per uur van de concentratie tussen $t = 0$ en $t = 8$. Rond af op twee decimalen.

Terugblik

Lineaire groei

Bij lineaire groei neemt de hoeveelheid telkens met hetzelfde getal toe. De formule van lineaire groei is $N = at + b$. Hierbij is b de beginwaarde en a de toename van N per tijdseenheid.

Een hoeveelheid N groeit lineair.

Op $t = 5$ is $N = 80$ en op $t = 12$ is $N = 136$.

Dan is $N = at + b$ met $a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{136 - 80}{12 - 5} = 8$.

$$\left. \begin{array}{l} N = 8t + b \\ t = 5 \text{ en } N = 80 \end{array} \right\} 8 \cdot 5 + b = 80, \text{ dus } b = 40$$

De formule is $N = 8t + 40$.

Exponentiële groei

Bij exponentiële groei wordt de hoeveelheid telkens met hetzelfde getal vermenigvuldigd. Het getal waarmee je per tijdseenheid vermenigvuldigt, heet de groeifactor per tijdseenheid.

Bij exponentiële groei hoort de formule $N = b \cdot g^t$. Hierin is b de beginhoeveelheid en g de groeifactor per tijdseenheid.

Ligt de groeifactor tussen 0 en 1, dan neemt de hoeveelheid af.

Is de groeifactor groter dan 1, dan neemt de hoeveelheid toe.

Aantonen van exponentiële groei bij een tabel

Om bij een tabel met waarnemingsgetallen te weten te komen of er sprake is van exponentiële groei, bereken je voor even grote intervallen

de quotiënten $\frac{\text{hoeveelheid aan eind interval}}{\text{hoeveelheid aan begin interval}}$.

Als deze quotiënten bij benadering gelijk zijn, mag je uitgaan van exponentiële groei.

Stijgen en dalen bij de grafiek van $N = b \cdot g^t$

De grafiek van $N = b \cdot g^t$ is voor $0 < g < 1$ afnemend dalend en voor $g > 1$ toenemend stijgend.

De formule $N = \frac{945}{21 \cdot 2,15^t}$ is te schrijven in de vorm $N = b \cdot g^t$.

$$\text{Je krijgt } N = \frac{945}{21 \cdot 2,15^t} = \frac{945}{21} \cdot 2,15^{-t} = \frac{945}{21} \cdot (2,15^{-1})^t \approx 45 \cdot 0,465^t.$$

Hieraan kun je zien dat de grafiek van $N = \frac{945}{21 \cdot 2,15^t}$ afnemend dalend is, want $g \approx 0,465$ en dit ligt tussen 0 en 1.

9.2 Groeipercentages



Op 1 januari 2015 had de dartsvereniging Tops 540 leden. Dit aantal neemt jaarlijks met 5% toe. Uitgaande van een jaarlijkse toename van 5% groeit het aantal leden van Tops exponentieel. Welk groeifactor hoort bij deze toename?

Theorie A Groeifactor en groeipercentage

Neemt een hoeveelheid per jaar met 18% toe, dan wordt de hoeveelheid met 1,18 per jaar vermenigvuldigd. Je hebt dus te maken met exponentiële groei met groeifactor 1,18 per jaar.

Weet je omgekeerd dat de groeifactor per jaar 1,26 is, dan heb je te maken met een toename van 26% per jaar. We zeggen dat het **groeipercentage** 26% is.

Bij een jaarlijkse afname van 12% hoort een exponentiële afname met groeifactor 0,88.

Weet je omgekeerd dat de groeifactor per jaar 0,982 is, dan heb je te maken met een afname van 1,8% per jaar.

18% erbij geeft
 $100\% + 18\% = 118\%$
dus $\times 1,18$

12% eraf geeft
 $100\% - 12\% = 88\%$
dus $\times 0,88$

Voorbeeld

Door verdwenen broedgebieden en intensivering van de landbouw zijn er steeds minder Kievieten in Nederland.

Nesten lopen gevaar door maaien, bemesten, ploegen en zaaien.

In maart 2000 waren er nog 250 000 broedparen Kievieten in Nederland.

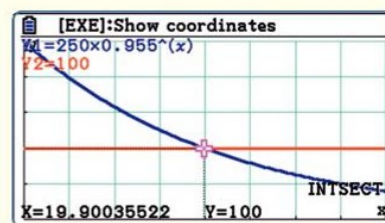
Daarna is dat aantal jaarlijks met 4,5% afgenomen.

- Stel de formule op van het aantal broedparen Kievieten in Nederland. Neem het aantal broedparen N in duizendtallen en de tijd t in jaren met $t = 0$ in maart 2000.
- In maart van welk jaar waren er voor het eerst minder dan 100 000 broedparen Kievieten in Nederland?



Uitwerking

- $N = b \cdot g^t$ met $b = 250$ en $g = 0,955$ geeft $N = 250 \cdot 0,955^t$.
- Los op $250 \cdot 0,955^t = 100$.
Voer in $y_1 = 250 \cdot 0,955^x$ en $y_2 = 100$.
De optie snijpunt geeft $x = 19,90...$
Dus in maart 2020.



R21


Zie het voorbeeld.

- a** Bij de uitwerking van het voorbeeld zie je een scherm van de GR. Tussen welke waarden van x en y is het venster op dit scherm genomen?
- b** In welk jaar was het aantal broedparen gehalveerd ten opzichte van het aantal in maart 2000?

22


Vul in.

groeipercentage	13%	3,3%	120%	0,7%				
groefactor					1,12	1,06	2,5	1,237

23


Vul in.

afname in procenten	13%	41,8%	6,2%	0,3%			
groefactor					0,98	0,999	0,246

24


- a** Een hoeveelheid neemt per jaar met 12,7% toe.
Geef de groefactor per jaar.
- b** Een hoeveelheid neemt per maand met 6,8% af.
Geef de groefactor per maand.
- c** Bij een exponentiële groei is de groefactor 1,735 per maand.
Geef het groeipercentage per maand.
- d** Bij een exponentiële groei is de groefactor 0,845 per dag.
Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per dag af?

25


De halsbandparkiet komt van oorsprong niet in Nederland voor. De populatie in Nederland ontstond doordat vrijgelaten of ontsnapte dieren zich gingen voortplanten. In 1990 waren er naar schatting 400 halsbandparkieten in het wild in Nederland. Sindsdien is dit aantal elk jaar met 12% toegenomen. Halsbandparkieten veroorzaken veel schade bij fruittelers, doordat ze appels en peren in boomgaarden stukpikken. Volgens fruitteler Jan Boer uit Barendrecht kost hem dat jaarlijks tienduizend euro aan omzet.



- a** Stel de formule op van het aantal in het wild voorkomende halsbandparkieten N in Nederland. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1990.
- b** In welk jaar zijn er naar verwachting voor het eerst meer dan 15 000 halsbandparkieten in Nederland?
- c** Neem aan dat in 2015 de totale omzetschade bij fruittelers veroorzaakt door de halsbandparkiet 2 miljoen euro was en dat deze omzetschade elk jaar met 10% toeneemt.
Bereken de gemiddelde omzetschade die één halsbandparkiet aanbrengt in 2025.

26
□ ⊙ *

In 2015 was de proportie e-bikes van alle verkochte fietsen in Nederland 0,27. Deze proportie groeit elk jaar met 14%. De proportie e-bikes van alle verkochte fietsen in Nederland noemen we P .

- a Stel de formule op van P . Neem t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2015.
- b Bereken in welk jaar voor het eerst meer dan de helft van alle verkochte fietsen in Nederland een e-bike is.

27
□ ⊙ *

Op 1 januari 2020 hadden de Verenigde Staten 333,5 miljoen inwoners. Dit aantal neemt naar verwachting jaarlijks met 1,8 miljoen toe. De bevolking van Rusland neemt juist af. Op 1 januari 2020 had Rusland 142,9 miljoen inwoners en dit aantal neemt naar verwachting jaarlijks met 0,4% af.

Bereken op basis van deze gegevens in welk jaar de Verenigde Staten drie keer zoveel inwoners hebben als Rusland.

28
□ ⊙ *

Ter bescherming tegen röntgenstraling wordt vaak lood gebruikt. Bij elke mm dikte van het lood dringt 30% minder röntgenstraling door. De bijbehorende formule is $I = 100 \cdot 0,70^d$. Hierin is I de intensiteit van de straling in procenten en d de dikte van het lood in mm.

- a Hoeveel procent van de straling dringt door lood met een dikte van 2 mm?
- b Met hoeveel procent neemt de straling af bij lood met een dikte van een halve cm?
- c Men wil dat slechts 1% van de straling doordringt. Wat is de dikte van het lood die men moet gebruiken? Geef het antwoord in gehele mm.



A29
□ ⊙ *

Spinazie bevat per 100 gram vers product 80 mg vitamine C. Bewaard bij kamertemperatuur neemt de hoeveelheid vitamine C per dag met 18 mg af. Bij diepvriesspinazie neemt de hoeveelheid vitamine C aanvankelijk per dag met 15% af.

H_k is het aantal mg vitamine C dat na t dagen nog aanwezig is in 100 gram bij kamertemperatuur bewaarde spinazie.

H_d is het aantal mg vitamine C dat na t dagen nog aanwezig is in 100 gram diepvriesspinazie.

- a Stel de formules op van H_k en H_d .
- b Hoeveel mg vitamine C bevat 100 mg diepvriesspinazie nog op het moment dat 100 mg bij kamertemperatuur bewaarde spinazie juist geen vitamine C meer bevat? Rond af op gehelen.

Bij diepvriesspinazie stabiliseert de hoeveelheid vitamine C zich op een niveau van 40% van de beginhoeveelheid.

- c Na hoeveel tijd stabiliseert de hoeveelheid vitamine C zich? Rond af op gehele uren.
- d Na hoeveel uur is de hoeveelheid vitamine C in diepvriesspinazie drie keer zo groot als in bij kamertemperatuur bewaarde spinazie?

A30  Op $t = 0$ zijn er in een vijver 150 kikkers en 300 salamanders. Het aantal kikkers neemt per jaar met 6% toe en het aantal salamanders neemt per jaar met 6% af.
Bereken na hoeveel jaar er evenveel kikkers als salamanders in de vijver zijn. Rond het antwoord af op één decimaal.

E31  Een hoeveelheid neemt het eerste jaar met 10% toe. De hoeveelheid neemt in het tweede jaar met 10% af. Het derde jaar neemt de hoeveelheid weer met 10% toe, het vierde jaar neemt de hoeveelheid weer met 10% af, enzovoort.
Na hoeveel jaar heb je voor het eerst minder dan 80% van de beginhoeveelheid?

E32  Een bal bereikt bij een vrije val na het stuiten weer een hoogte van 80% van de vorige hoogte. De bal wordt op een hoogte van 4 meter losgelaten. Geef je antwoorden in cm nauwkeurig.

- a** Hoeveel cm heeft de bal afgelegd als hij voor de vierde keer de grond raakt?
- b** De bal wordt dit keer op een grotere hoogte losgelaten. Na de derde stuiter bereikt de bal een hoogte van 4 meter.
Op welke hoogte is de bal losgelaten?

O33  In een bacteriecultuur groeit het aantal bacteriën met 1% per minuut.

- a** We vragen ons af hoeveel minuten het duurt voordat het aantal bacteriën is verdubbeld. Geef hiervan een schatting. Kies uit: 70, 80, 90 en 100 minuten.
- b** Op $t = 0$ zijn er 1 miljard bacteriën.
Ga met een berekening na welke van de antwoorden van a het beste is.

Theorie B Verdubbelingstijd

Om een goed beeld te krijgen van de snelheid van exponentiële groei, kun je de verdubbelingstijd gebruiken.

De **verdubbelingstijd** is de tijd die nodig is voor de verdubbeling van een hoeveelheid bij exponentiële groei.

Neemt een hoeveelheid N exponentieel toe met groeifactor 1,038 per jaar en is de beginhoeveelheid 20, dan is de formule $N = 20 \cdot 1,038^t$ met t de tijd in jaren. Om te berekenen hoeveel jaar het duurt totdat de beginhoeveelheid 20 is verdubbeld, los je de vergelijking $20 \cdot 1,038^t = 40$ op. Uit $20 \cdot 1,038^t = 40$ volgt $1,038^t = 2$.

Ga je uit van beginhoeveelheid 50, dan krijg je bij verdubbeling van de beginhoeveelheid de vergelijking $50 \cdot 1,038^t = 100$.

Uit $50 \cdot 1,038^t = 100$ volgt $1,038^t = 2$.

Ga je uit van beginhoeveelheid b , dan krijg je bij verdubbeling van de beginhoeveelheid de vergelijking $b \cdot 1,038^t = 2b$.

Uit $b \cdot 1,038^t = 2b$ volgt $1,038^t = 2$.

$$\begin{array}{l} b \cdot g^t = 2b \\ g^t = 2 \end{array} \quad \text{): } b$$

Steeds krijg je bij groeifactor 1,038 en verdubbeling van een hoeveelheid te maken met de vergelijking $1,038^t = 2$. Deze vergelijking los je als volgt op. Voer in $y_1 = 1,038^x$ en $y_2 = 2$. De optie snijpunt geeft $x \approx 18,58\dots$

Dus het duurt 18 jaar en $0,58\dots \times 12 \approx 7$ maanden totdat de hoeveelheid verdubbeld is.

De verdubbelingstijd bij een groeifactor van 1,038 per jaar is 18 jaar en 7 maanden.

De verdubbelingstijd is onafhankelijk van de beginhoeveelheid.

De verdubbelingstijd is de tijd die nodig is voor de verdubbeling van een hoeveelheid bij exponentiële groei.

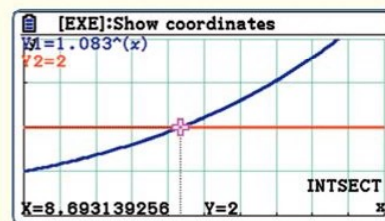
Bij exponentiële groei met groeifactor g vind je de verdubbelingstijd door de vergelijking $g^t = 2$ op te lossen.

Voorbeeld

- Een populatie neemt jaarlijks met 8,3% toe.
Bereken de verdubbelingstijd. Geef het antwoord in maanden nauwkeurig.
- Een hoeveelheid verdubbelt elke 15 jaar.
Bereken het groeipercentage per jaar.

Uitwerking

- Groeifactor per jaar is 1,083, dus $1,083^t = 2$.
Voer in $y_1 = 1,083^x$ en $y_2 = 2$.
De optie snijpunt geeft $x = 8,69\dots$
De verdubbelingstijd is 8 jaar en $0,69\dots \times 12 \approx 8$ maanden.
- Er geldt $g^{15} = 2$ met g de groeifactor per jaar.
Voer in $y_1 = x^{15}$ en $y_2 = 2$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 1,047$.
Dus het groeipercentage is 4,7% per jaar.



34



- Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 13,1% toe.
Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig.
- Een hoeveelheid neemt met 28,4% per week toe.
Bereken de verdubbelingstijd in dagen nauwkeurig.
- Een hoeveelheid verdubbelt elke 25 jaar.
Bereken de groeifactor per jaar. Rond af op drie decimalen.
- Een hoeveelheid verdubbelt elke week.
Bereken het groeipercentage per dag.

35
□ ⊙ *

- a** Voor het aantal inwoners van Ghana geldt de formule $N = 18,7 \cdot 1,025^t$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2000 en N het aantal inwoners in miljoenen.

Bereken de verdubbelingstijd van het aantal inwoners van Ghana.

- b** De bevolking van Gambia neemt elk jaar met 3,2% toe. De bevolking van Gabon neemt elk jaar met 2,2% toe.

Bereken, zonder de verdubbelingstijden te berekenen, bij welk land de bevolking een langere verdubbelingstijd heeft.

- c** Karachi is de grootste stad van Pakistan. Tussen 1998 en 2011 is de bevolking van Karachi meer dan verdubbeld. Neem aan dat het aantal inwoners in deze periode exponentieel is gegroeid en dat de verdubbelingstijd 11,5 jaar was.

Bereken met hoeveel procent per jaar de bevolking van Karachi in de genoemde periode is toegenomen.



A36
□ ⊙ *

In Nederland werd in 1999 bijna 44 miljard euro aan zorg en welzijn uitgegeven. Sindsdien zijn deze kosten enorm toegenomen, maar niet in elke periode was de groei even groot. Zie de tabel.

periode	jaren	jaarlijkse groei
I	2000 t/m 2003	9,7%
II	2004 en 2005	3,8%
III	2006 en 2007	5,0%
IV	2008 t/m 2012	3,9%

Een nadeel van het geven van groeipercentages is dat je de groei mogelijk onderschat. Verdubbelingstijden geven dan een beter beeld van de sterkte van de groei.

- a** Bereken voor elke periode de verdubbelingstijd in jaren nauwkeurig.
b Onderzoek of in de periode 2000 t/m 2012 de uitgaven aan zorg en welzijn in Nederland zijn verdubbeld.

In de jaren 2013 en 2014 namen de uitgaven minder sterk toe, maar in de periode 2015 t/m 2019 trad er weer een sterkere stijging op. De verdubbelingstijd voor de periode 2015 t/m 2019 was 26 jaar.

- c** Bereken voor de periode 2015 t/m 2019 het groeipercentage per jaar.
d In 2018 waren de uitgaven aan zorg en welzijn 100 miljard euro. Bereken de uitgaven aan zorg en welzijn in 2015. Rond af op miljarden euro's.

R37
*

Onderzoek of bij exponentiële groei een verdubbeling van het groeipercentage een halvering van de verdubbelingstijd tot gevolg heeft.

Invasieve exoten

Halsbandparkieten, roodwangschildpadden, Amerikaanse vogelkers: grote kans dat u deze soorten regelmatig ziet. Het zijn exoten: soorten die niet op eigen kracht maar door de mens in Nederland terecht zijn gekomen. Deze soorten kunnen zich permanent vestigen in onze natuur en zich snel vermeerderen. Dan spreken we van invasieve exoten.



Amerikaanse vogelkers

‘Niks mis met wat extra soorten in de natuur’, zullen veel mensen denken. Maar sommige exoten veroorzaken veel schade. Wie last heeft van hooikoorts ondervindt dat aan den lijve: de oprukkende hooikoortsplant Ambrosia verlengt het hooikoortsseizoen. Behalve gezondheidsproblemen kan er schade ontstaan voor de economie. Bijvoorbeeld door aantasting van oogsten door exotische insecten. Ook onze eigen flora en fauna ondervindt veel last van de indringers. Ze worden verdreven uit hun leefgebied en hun nest, lopen nieuwe ziektes op of worden domweg opgevreten. Als een invasieve exoot in de natuur gevestigd is, zijn vaak aanzienlijke uitgaven nodig om de schade te herstellen en de invasieve exoot te verwijderen of om verdere verspreiding te voorkomen. Geschat wordt dat de kosten alleen al in de lidstaten van de Europese Unie ten minste € 12 miljard per jaar bedragen!

Bron: invasieve-exoten.nl

A38
□ ◎ *

In deze opgave bekijken we een invasieve exoot waarvan het aantal exemplaren gedurende een periode exponentieel toeneemt met een verdubbelingstijd van T jaar.

- a** Hoeveel keer zoveel exemplaren zijn er na drie keer T jaar? En na vier keer T jaar?

Op $t = 0$ zijn er van deze exoot 10000 exemplaren in Nederland. De verdubbelingstijd is 1,5 jaar. Onderzoekers waarschuwen dat een kritische grens wordt bereikt als er nog eens 30000 exemplaren bijkomen.

- b** Bereken hoeveel jaar het nog duurt voordat de kritische grens wordt bereikt als er geen maatregelen worden getroffen.
- c** Op $t = 0$ is men begonnen met de bestrijding van de soort. Daardoor wordt de verdubbelingstijd 5 jaar.
- Bereken hoeveel jaar het dan duurt voordat de kritische grens wordt bereikt.

O39
□ ◎ *

Een hoeveelheid neemt per jaar met 4,5% af.

- a** Bereken hoeveel jaar het duurt voordat de hoeveelheid is afgenomen van 500 naar 250.
- b** Bereken hoeveel jaar het duurt voordat de hoeveelheid is afgenomen van 250 naar 125.
- c** Vergelijk de antwoorden op de vragen a en b.
- Wat valt je op?

Theorie C Halveringstijd

In opgave 39 heb je bij een exponentiële afname berekend hoelang het duurt voordat een hoeveelheid is gehalveerd. Deze tijd heet de **halveringstijd**.

De halveringstijd is onafhankelijk van de beginhoeveelheid.

De halveringstijd is de tijd waarin een hoeveelheid gehalveerd wordt bij exponentiële groei. Is de groeifactor g , dan vind je de halveringstijd door de vergelijking $g^t = 0,5$ op te lossen.

Voorbeeld

- a Gegeven is de formule $N = 200 \cdot 0,78^t$. Hierin is t de tijd in jaren. Bereken de halveringstijd in maanden nauwkeurig.
- b Een hoeveelheid heeft een halveringstijd van 8 uur en 45 minuten. Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid per uur afneemt.

Uitwerking

- a $g = 0,78$, dus $0,78^t = 0,5$
Voer in $y_1 = 0,78^x$ en $y_2 = 0,5$.
De optie snijpunt geeft $x = 2,78\dots$
De halveringstijd is 2 jaar en $0,78\dots \times 12 \approx 9$ maanden.
- b De halveringstijd is 8,75 uur, dus $g^{8,75} = 0,5$.
Voer in $y_1 = x^{8,75}$ en $y_2 = 0,5$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 0,924$, dus de afname is 7,6% per uur.

40
□ ⊗ *

- a Gegeven is de formule $N = 6 \cdot 0,8^t$. Hierin is t de tijd in jaren. Bereken de halveringstijd in maanden nauwkeurig.
- b Een hoeveelheid neemt per jaar met 8% af. Bereken de halveringstijd in maanden nauwkeurig.
- c Een hoeveelheid heeft een halveringstijd van 5 jaar en 3 maanden. Bereken de groeifactor per jaar. Rond af op drie decimalen.

A41
□ ⊗ *

Uit een onderzoek in opdracht van Natuurmonumenten uit 2018 blijkt dat het aantal loopkevers in een natuurgebied in Drenthe dramatisch is afgenomen. De onderzoekers vonden een halveringstijd van 12 jaar. Uit een onderzoek in Duitsland uit 2017 blijkt dat in 27 jaar 76% van de insecten is verdwenen. Onderzoek of deze twee resultaten met elkaar in lijn zijn. Ga uit van exponentiële afname.



Terugblik

Groeipercentage en groeifactor

Bij een groeipercentage van 5,8% hoort de groeifactor 1,058.

Bij een afname van 3,2% hoort de groeifactor 0,968.

Bij de groeifactor 2,42 hoort een groeipercentage van 142%.

Bij de groeifactor 0,42 hoort een afname van 58%.

Neemt een hoeveelheid M vanaf 2010 jaarlijks met 12,5% toe en is M in 2010 gelijk aan 860, dan hoort hierbij de formule $M = 860 \cdot 1,125^t$ met t in jaren en $t = 0$ in 2010.

Neemt een hoeveelheid N vanaf 2015 jaarlijks met 1,8% af en is N in 2015 gelijk aan 1640, dan hoort hierbij de formule $N = 1640 \cdot 0,982^t$ met t in jaren en $t = 0$ in 2015.

Verdubbelingstijd en halveringstijd

De verdubbelingstijd bij exponentiële groei met groeifactor g (met g groter dan 1)

- is de tijd waarin een hoeveelheid verdubbelt
- is onafhankelijk van de beginhoeveelheid
- vind je door de vergelijking $g^t = 2$ op te lossen.

verdubbelingstijd

$$g^t = 2$$

Bij een groeipercentage van 11,7% per jaar bereken je de verdubbelingstijd per jaar door de vergelijking $1,117^t = 2$ op te lossen.

Voer in $y_1 = 1,117^x$ en $y_2 = 2$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 6,3$ dus de verdubbelingstijd is ongeveer 6,3 jaar.

Om bij een verdubbelingstijd van 8 jaar het groeipercentage per jaar te berekenen, los je de vergelijking $g^8 = 2$ op.

Voer in $y_1 = x^8$ en $y_2 = 2$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 1,091$ dus het groeipercentage per jaar is 9,1%.

De halveringstijd bij exponentiële groei met groeifactor g (met g tussen 0 en 1)

- is de tijd waarin een hoeveelheid halveert
- is onafhankelijk van de beginhoeveelheid
- vind je door de vergelijking $g^t = 0,5$ op te lossen.

halveringstijd

$$g^t = 0,5$$

9.3 Formules bij exponentiële groei

O42


Bij een exponentiële groei is de groeifactor per jaar gelijk aan 9.

De beginwaarde is 2.

a Vul de tabel in.

tijd in jaren	0	1	2	3	4	5
hoeveelheid N	2	18	162			

b Met welk getal wordt N per twee jaar vermenigvuldigd?

c Wordt N per halfjaar met meer of minder dan 4,5 vermenigvuldigd?

Theorie A Groeipercents omzetten naar een andere tijdseenheid

Een hoeveelheid groeit exponentieel met beginwaarde 100 en groeifactor 3 per uur.

EXPONENTIËLE GROEI

t	0	1	2	3	4	5	6
N	100	$100 \cdot 3^1$ = 300	$100 \cdot 3^2$ = 900	$100 \cdot 3^3$ = 2700	$100 \cdot 3^4$ = 8100	$100 \cdot 3^5$ = 24 300	$100 \cdot 3^6$ = 72 900

Diagram illustrating the growth factors between consecutive values of N and over intervals of 2 and 3 hours:

- From $t=0$ to $t=1$: $\times 3$
- From $t=1$ to $t=2$: $\times 3$
- From $t=2$ to $t=3$: $\times 3$
- From $t=3$ to $t=4$: $\times 3$
- From $t=4$ to $t=5$: $\times 3$
- From $t=5$ to $t=6$: $\times 3$
- From $t=0$ to $t=2$: $\times 3^2$
- From $t=2$ to $t=4$: $\times 3^2$
- From $t=4$ to $t=6$: $\times 3^2$
- From $t=0$ to $t=3$: $\times 3^3$
- From $t=3$ to $t=6$: $\times 3^3$

Je ziet

- per 2 uur is de groeifactor 3^2
- per 3 uur is de groeifactor 3^3 .

Algemeen

- per n uur is de groeifactor 3^n .

Deze regel geldt ook voor niet-gehele waarden van n .

Zo geldt

- per half uur is de groeifactor $3^{\frac{1}{2}} \approx 1,732$
- per kwartier is de groeifactor $3^{\frac{1}{4}} \approx 1,316$
- per minuut is de groeifactor $3^{\frac{1}{60}} \approx 1,018$.

NORM DRIJF AUTO REËL RAD W/N	
$3^{1/2}$	1.732050808
$3^{1/4}$	1.316074013
$3^{1/60}$	1.018478864

Bij exponentiële groei met groeifactor g per tijdseenheid is de groeifactor per n tijdseenheden gelijk aan g^n .

Heb je te maken met exponentiële groei met groeifactor 0,6 per dag, dan is

- de groeifactor per week $0,6^7 \approx 0,028$
- de groeifactor per uur $0,6^{\frac{1}{24}} \approx 0,979$
- de groeifactor per acht uur $0,6^{\frac{1}{3}} \approx 0,843$.

Om te berekenen wat het groeipercentage per dag is bij een toename van 70% per week gebruik je $g_{\text{week}} = 1,70$ geeft $g_{\text{dag}} = 1,70^{\frac{1}{7}} \approx 1,079$. Het groeipercentage per dag is 7,9%.

Bij exponentiële groei gaat het omzetten van een groeipercentage naar een andere tijdseenheid via groeifactoren.

Voorbeeld

Een hoeveelheid neemt per zes uur met 18% toe.

- a Hoeveel procent is de toename per dag?
- b Hoeveel procent is de toename per uur?

Uitwerking

- a $g_{6 \text{ uur}} = 1,18$
 $g_{\text{dag}} = 1,18^4 \approx 1,939$
De toename is 93,9% per dag.
- b $g_{6 \text{ uur}} = 1,18$
 $g_{\text{uur}} = 1,18^{\frac{1}{6}} \approx 1,028$
De toename is 2,8% per uur.

- 1 Eerst de groeifactor per 6 uur.
- 2 Dan de groeifactor per dag.
- 3 Ten slotte het groeipercentage per dag.

43 Een hoeveelheid neemt per kwartier met 12% toe.



- a Hoeveel procent is de toename per uur?
- b Hoeveel is de procentuele toename per vijf minuten?
- c Hoeveel procent is de toename per vijf uur?
Rond af op gehelen.

Geef percentages in één decimaal en rond groeifactoren af op drie decimalen, tenzij anders wordt gevraagd.

44 Een hoeveelheid neemt per dag met 16% af.



- a Bereken de groeifactor per week.
- b Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per uur af?
- c Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per kwartier af? Rond af op twee decimalen.

45 Bij een exponentiële groei hoort een groeifactor van 1,3 per dag.



- a Bereken het groeipercentage per week. Rond af op gehelen.
- b Bereken het groeipercentage per vier uur.

46
□ ⊙ *

- a Een hoeveelheid neemt per uur met 19,5% af.
Hoeveel procent is de afname per kwartier?
- b Een hoeveelheid neemt per jaar met 0,08% toe.
Hoeveel procent is de toename per eeuw?
- c Een hoeveelheid neemt per week met 180% toe.
Hoeveel procent is de toename per dag?

R47
□ ⊙ *

- Een hoeveelheid heeft een verdubbelingstijd van 4 jaar.
Lotte en Anne vragen zich af wat het groeipercentage per maand is.
Ze bedenken dat vier jaar gelijk is aan 48 maanden.
- a Lotte pakt het aan zoals in voorbeeld b op bladzijde 24.
Ze krijgt $g^{48} = 2$ met g de groeifactor per maand.
Los deze vergelijking op en geef het groeipercentage per maand.
 - b Anne pakt het aan zoals in het voorbeeld op de vorige bladzijde.
Ze krijgt $g_{48 \text{ maanden}} = 2$.
Bereken g_{maand} en geef het groeipercentage per maand.
 - c Welke van bovenstaande manieren heeft je voorkeur? Licht toe.

48
□ ⊙ *

- a Een hoeveelheid heeft een verdubbelingstijd van 1,5 jaar.
Bereken het groeipercentage per week.
- b Een hoeveelheid heeft een halveringstijd van 15 seconden.
Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid per minuut afneemt.

A49
□ ⊙ *

- Ga bij de volgende vragen uit van exponentiële groei.
- a Het beleid van de regering is erop gericht om de hoeveelheid opgewekte energie door particulieren met zonnecellen elke drie jaar met een factor 2,5 te vermenigvuldigen.
Bereken het groeipercentage per jaar.
 - b In 2020 werd in Nederland twee keer zoveel elektriciteit door windmolens op land geleverd als in 2015.
Bereken het groeipercentage per jaar.
 - c Het aantal muziekwinkels in Nederland is in 12 jaar tijd met 22% afgenomen.
Hoeveel procent is de afname per jaar?



R50
□ ⊙ *

- De volgende uitspraken zijn onjuist. Verbeter ze.
- a Bij een toename van 5% per dag hoort een toename van $7 \times 5\%$ per week.
 - b Bij een afname van 20% per uur hoort een afname van $\frac{1}{4} \times 20\%$ per kwartier.

51

Bij geluid spelen de begrippen geluidsintensiteit en geluidsniveau een rol. Geluidsintensiteit is het vermogen van geluid per m^2 . In de praktijk werkt men liever met het geluidsniveau. De eenheid van geluidsniveau is decibel (dB).

Een rustig gesprek heeft een geluidsniveau van 50 dB. Bij een drukke verkeersweg is het geluidsniveau 80 dB.

Er geldt de volgende vuistregel:

als de geluidsintensiteit vier keer zo groot wordt, neemt het geluidsniveau met 6 dB toe.

Gebruik deze vuistregel bij het beantwoorden van de volgende vragen.

- a** Bereken met hoeveel dB het geluidsniveau toeneemt, als de geluidsintensiteit 64 keer zo groot wordt.
- b** Bereken hoeveel keer zo groot de geluidsintensiteit is bij een drukke verkeersweg vergeleken met een rustig gesprek.

A52

Wikipedia is een populair naslagwerk op internet. De start van Wikipedia was in januari 2001. Tot januari 2007 is het aantal maandelijks geplaatste artikelen op Wikipedia exponentieel toegenomen. In januari 2007 werden 320 keer zoveel artikelen geplaatst als in januari 2001.

- a** Bereken het groeipercentage per maand.

In januari 2011 was het aantal maandelijks geplaatste artikelen met 35% afgenomen vergeleken met januari 2007. Een mogelijke verklaring is de verscherpte controle op de inhoud van de artikelen.

- b** Met hoeveel procent nam in de periode 2007-2011 het aantal maandelijks geplaatste artikelen per maand af? Ga uit van exponentiële afname.
- c** Vanaf januari 2011 is het aantal maandelijks geplaatste artikelen redelijk stabiel met een aantal van ongeveer 4000. Schat het aantal geplaatste artikelen in januari 2001.

A53

In de wereld wordt steeds meer plastic geproduceerd. De hoeveelheid jaarlijks geproduceerd plastic neemt al vanaf de jaren 70 van de vorige eeuw exponentieel toe. In 1970 werd 44 miljard kg geproduceerd en in 2009 was dat toegenomen tot 250 miljard kg.

Een deel van het plastic komt als afval in de oceaan terecht, waar het mede onder invloed van de zon uiteenvalt in zeer kleine deeltjes, het zogenaamde microplastic.

Onderzoekers bestuderen hoeveel van dit microplastic neerdaalt op de bodem van de oceaan. In deze bodem kan men lagen onderscheiden. Elke laag hoort bij een jaar. In de bodem nabij de kust van Californië vond men in de laag die bij 1972 hoort 6 deeltjes microplastic per 100 cm^2 . In de laag van 1994 vond men 17 deeltjes per 100 cm^2 . Neem aan dat de toename exponentieel is.

Onderzoek of de hoeveelheid microplastic in de lagen van de bodem met ongeveer hetzelfde percentage per jaar toeneemt als de wereldwijde productie van plastic.

A54*****

Tussen eind 2012 en eind 2018 is het totaal geïnstalleerd vermogen van zonnepanelen in Nederland 12 keer zo groot geworden. Ga hierbij uit van exponentiële groei.

Eind 2018 was er in totaal 4400 megawattpiek aan vermogen geïnstalleerd.

Van het totaal geïnstalleerd vermogen van zonnepanelen was eind 2017 58% aanwezig op daken van particulieren.

Bereken het geïnstalleerd vermogen van zonnepanelen eind 2017 op daken van particulieren.

O55**□ ⊗ ***

Een bacteriecultuur groeit exponentieel. Op $t = 5$ zijn er 50 000 bacteriën.

Op $t = 9$ zijn er 300 000 bacteriën. Hierbij is t in uren.

Uit de gegevens volgt dat de groeifactor per uur gelijk is aan 1,565.

a Toon dit aan.

Bij deze situatie hoort een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$ met N het aantal bacteriën en g de groeifactor per uur. Om b te berekenen kun je de vergelijking $b \cdot 1,565^5 = 50\,000$ gebruiken.

b Licht dit toe.

Theorie B Een formule opstellen bij exponentiële groei

Is bij een exponentiële groei de hoeveelheid op twee tijdstippen bekend, dan kun je de bijbehorende formule opstellen. Je berekent hiertoe eerst de groeifactor per tijdseenheid en vervolgens de beginhoeveelheid. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Met name door de verspreiding van klamboes die zijn geïmpregneerd met insecticide, is het aantal dodelijke slachtoffers van malaria sinds 2009 exponentieel afgenomen. In 2012 waren er nog 640 duizend dodelijke slachtoffers. In 2017 was dat aantal afgenomen tot 435 duizend.

Stel de formule op van het aantal dodelijke slachtoffers van malaria. Neem het aantal N in duizendtallen en de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2009.



Uitwerking

$$N = b \cdot g^t$$

$$g_{5 \text{ jaar}} = \frac{435}{640}, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = \left(\frac{435}{640}\right)^{\frac{1}{5}} = 0,9256\dots$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,9256\dots^t \\ t = 3 \text{ en } N = 640 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 0,9256\dots^3 = 640 \\ b = \frac{640}{0,9256\dots^3} \approx 807 \end{array}$$

$$\text{Dus } N = 807 \cdot 0,926^t.$$

NORM DRIJF AUTO REËL RAD W/N

$(435/640)^{1/5}$

..... 0.9256820803

$640/\text{Antw}^3$

..... 806.8529742

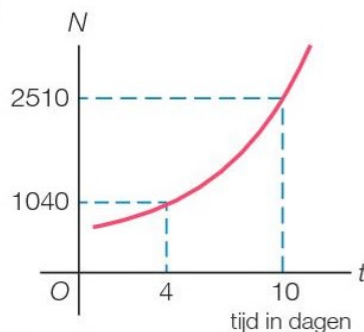


- a** Een hoeveelheid neemt exponentieel toe. Op $t = 3$ is $N = 1600$ en op $t = 10$ is $N = 4100$. Hierbij is t in uren. Stel de formule op van N .
- b** Een bacteriesoort groeit exponentieel. Op $t = 3$ zijn er 150 000 bacteriën en op $t = 8$ zijn dat er 1 250 000. Hierbij is t in uren. Stel de formule op van het aantal bacteriën B . Rond de beginhoeveelheid af op duizendtallen.
- c** Een hoeveelheid radioactieve stof neemt exponentieel af. Op $t = 5$ is er 0,60 gram en op $t = 8$ is er 0,47 gram. Hierbij is t in dagen. Stel de formule op van de hoeveelheid radioactieve stof H in gram.

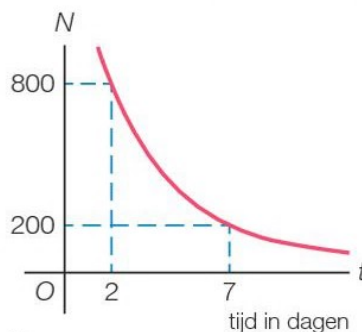
Geef de beginwaarde in dezelfde nauwkeurigheid als de gegevens, tenzij anders wordt gevraagd.



- a** Stel de formule op die bij de exponentiële groei in figuur 9.5a hoort.



a



b

figuur 9.5

- b** Een hoeveelheid neemt exponentieel af. Zie figuur 9.5b. Stel de formule op van N .



Een projectontwikkelaar is gespecialiseerd in het bouwen van woontorens met op de begane grond winkels en vanaf de eerste verdieping appartementen. Zij rekent voor de bouwlaag op de begane grond 4,89 miljoen euro. Hoeveel ze rekent voor de totale kosten K in miljoenen euro's is afhankelijk van het aantal verdiepingen. Zie de tabel. Hierin is n het aantal verdiepingen met appartementen.

n	0	8	16	24	32
K	4,89	6,05	7,49	9,27	11,47

Tussen n en K bestaat een exponentieel verband.

- a** Toon dit aan.
- b** Bereken de totale bouwkosten in het geval de woontoren bestaat uit 20 verdiepingen met appartementen.
- c** De projectontwikkelaar wil dat de totale bouwkosten maximaal 10,3 miljoen euro bedragen. Hoeveel verdiepingen met appartementen kan zij voor dit bedrag bouwen?



A59
□ ◎ *

In de jaren 80 van de vorige eeuw was de ooievaar vrijwel uit Nederland verdwenen. Door herintroductie van ooievaars uit dierentuinen en beschermingsprogramma's is het aantal ooievaars sinds 1995 exponentieel toegenomen. In 2008 waren er al weer 700 broedparen in Nederland en in 2016 waren dat er al 1000.



- a Stel de formule op van het aantal broedparen ooievaars N in Nederland. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1995.
- b In welk jaar zullen er voor het eerst meer dan 1500 broedparen ooievaars in Nederland zijn, als de genoemde groei doorzet?

A60
□ ◎ *

Door een bloedvatpropje heeft een patiënt tijdelijk verminderd zicht in één oog. Bij het onderzoek van de orthoptist, 10 dagen nadat de patiënt last kreeg, is het verlies van het zicht nog 56%. Bij het vervolgonderzoek 39 dagen na het eerste onderzoek is het verlies van het zicht nog slechts 9%. Ga ervan uit dat het verlies van het zicht exponentieel afneemt.

- a Hoe groot was het verlies van het zicht op het moment dat de patiënt last kreeg?
- b Hoeveel weken nadat de patiënt last kreeg, zal hij naar verwachting 99% van zijn oorspronkelijk zicht terug hebben?

A61
□ ◎ *

Water absorbeert rood licht meer dan blauw licht en daarom ziet op grote diepte alles er blauw uit. Zo is in de Caribische Zee op vijf meter diepte al 92% van het rode licht geabsorbeerd en van het blauwe nog maar 83%. We noemen P_r het percentage van het rode licht dat op een diepte van d meter doordringt en P_b het percentage van het blauwe licht dat op een diepte van d meter doordringt. Er bestaat een exponentieel verband, zowel tussen P_r en d als tussen P_b en d .

- a Stel de formule op van P_r en van P_b .
- b Tot welke diepte dringt slechts 1% van het rode licht door? Hoeveel procent blauw licht dringt tot deze diepte door?

A62
□ ◎ *

Op 1 januari 2015 telde ons land 2425 honderdplussers. Dat waren er 1327 meer dan op 1 januari 2000. Het merendeel van de honderdplussers was vrouw: in 2000 waren er 928 vrouwen en 170 mannen honderdplus en in 2015 waren er 2112 vrouwen en 313 mannen honderdplus. Naar verwachting zal het aantal vrouwelijke honderdplussers de komende jaren blijven toenemen met hetzelfde jaarlijkse groeipercentage als in de periode 2000-2015 het geval was. Het aantal mannelijke honderdplussers zal echter naar verwachting sterker groeien, namelijk met 9,5% per jaar. 'Een verklaring hiervoor is dat mannen steeds minder zijn gaan roken en vrouwen juist meer', aldus het CBS.

Onderzoek hoeveel procent van de honderdplussers in 2025 naar verwachting man is.

Terugblik

Groeifactoren omzetten naar andere tijdseenheden

Is g de groeifactor per tijdseenheid, dan is de

- groeifactor per drie tijdseenheden gelijk aan g^3
- groeifactor per n tijdseenheden gelijk aan g^n .

Deze regel geldt ook voor niet-gehele getallen n .

Is de groeifactor per uur gelijk aan 1,8, dan is de

- groeifactor per halfuur gelijk aan $1,8^{\frac{1}{2}} \approx 1,342$
- groeifactor per kwartier gelijk aan $1,8^{\frac{1}{4}} \approx 1,158$.

Groeipercents omzetten naar andere eenheden

Is de toename per dag 30%, dan is de

- groeifactor per dag 1,3
- groeifactor per week $1,3^7 \approx 6,27$ en de toename per week dus 527%
- groeifactor per uur $1,3^{\frac{1}{24}} \approx 1,011$ en de toename per uur dus 1,1%.

Is de afname per uur 8,2%, dan is de

- groeifactor per uur 0,918
- groeifactor per dag $0,918^{24} \approx 0,128$, dus de afname per dag is 87,2%
- groeifactor per kwartier $0,918^{\frac{1}{4}} \approx 0,979$, dus de afname per kwartier is 2,1%.

Het omzetten van een groeipercents naar een andere eenheid gaat via groeifactoren.

De formule opstellen bij exponentiële groei

Weet je bij een exponentiële groei op twee tijdstippen de hoeveelheid, dan kun je de formule opstellen.

Is $N = 82$ voor $t = 5$ uur en is $N = 246$ voor $t = 12$ uur,

dan is $g_{7\text{ uur}} = \frac{246}{82} = 3$, dus $g_{\text{uur}} = 3^{\frac{1}{7}} \approx 1,1699\dots$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,1699\dots^t \\ \text{bij } t = 5 \text{ hoort } N = 82 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,1699\dots^5 = 82 \\ b = \frac{82}{1,1699\dots^5} \approx 37 \end{array}$$

Dus $N = 37 \cdot 1,170^t$.

Met deze formule kun je bijvoorbeeld berekenen voor welke t de hoeveelheid gelijk is aan 500. Los hiertoe de vergelijking

$$37 \cdot 1,170^t = 500 \text{ op.}$$

Invoeren van $y_1 = 37 \cdot 1,170^x$ en $y_2 = 500$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 16,58\dots$

Dus voor $t \approx 16,6$ is $N = 500$.

NORM DRIJF AUTO REËEL RAD WIN	
$3^{1/7}$	1.169930813
82/Ans ⁵	37.41217491

9.4 Logaritmisch papier en redeneren met groeiformules

O63
☐⊗*

Van een aantal dieren is een indicatie gegeven van het gewicht van een volwassen exemplaar.

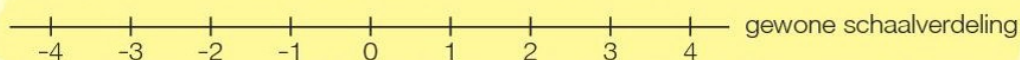
kolibrie	0,002 kg
muis	0,02 kg
egel	0,9 kg
wasbeer	10 kg
zeehond	100 kg
paard	600 kg
olifant	5500 kg
walvis	100 000 kg



- Hoeveel keer zo zwaar is de walvis als de wasbeer?
En hoeveel keer zo zwaar als de kolibrie?
- We willen de acht gewichten op een getallenlijn zetten.
Stel dat we de eenheid zo kiezen, dat 1 mm overeenkomt met 1 gram.
Hoe lang moet de getallenlijn dan worden?
- Neem aan dat op de getallenlijn 1 mm overeenkomt met 1000 kg.
Hoe lang moet de getallenlijn dan worden? Welk bezwaar is tegen deze eenheid in te brengen?

Theorie A Logaritmische schaalverdeling

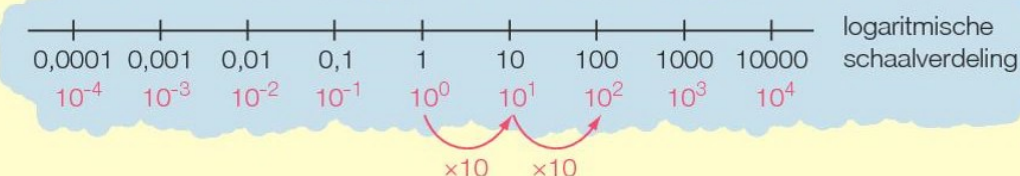
In opgave 63 heb je gezien dat je de waarnemingsgetallen niet goed kunt uitzetten op de getallenlijn met een gewone schaalverdeling. Daarom gebruiken we in dit soort gevallen een **logaritmische schaalverdeling**. Bij een gewone schaalverdeling zit er tussen de getallen 0 en 1 evenveel afstand als tussen de getallen 1 en 2, enzovoort.



Bij een logaritmische schaalverdeling zit er tussen de getallen $10^0 = 1$ en $10^1 = 10$ evenveel afstand als tussen de getallen $10^1 = 10$ en $10^2 = 100$.

Bij een vaste stapgrootte hoort bij een logaritmische schaalverdeling dus een vaste factor.

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$$



In figuur 9.6 zie je een gedeelte van een vel **logaritmisch papier**. Op de y -as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt. Op deze as staat het getal 1 bij het snijpunt met de x -as. Op de x -as is een gewone schaalverdeling gekozen.

Met de getallen langs de y -as kun je bij elke horizontale lijn te weten komen welke y -waarde erbij hoort.

Van onder naar boven zie je eerst de getallen 1, 2, 3, ..., 9 en $10^1 = 10$.

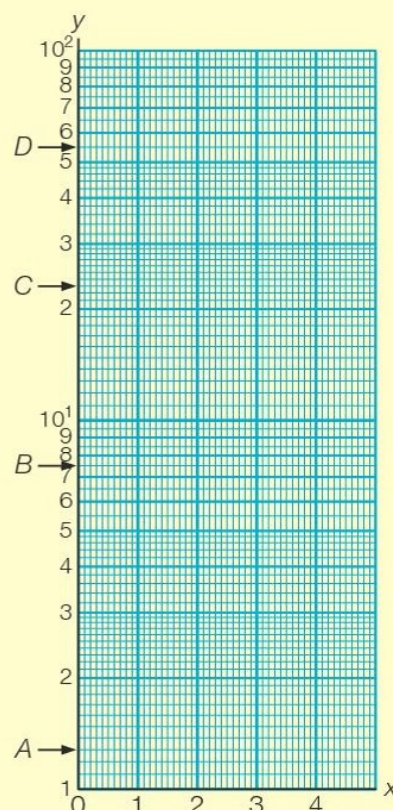
De lijn direct boven de lijn $y = 10$ hoort bij $y = 11$, dan $y = 12$, ... tot en met $y = 20$.

Bij de lijn $y = 20$ staat 2, want $2 \cdot 10^1 = 20$.

Verder naar boven krijg je vervolgens lijnen bij de waarden 21, 22, 23, ..., 29 en 30.

Tussen 30 en 40 staan alleen nog maar lijnen bij 32, 34, 36 en 38.

Tussen 50 en 60 staat alleen nog maar een lijn bij 55.



figuur 9.6

64 Zie figuur 9.6.



- Welke y -waarden horen bij de letters A tot en met D ?
- Je ziet in de figuur wel de lijn $y = 17$, maar niet de lijn $y = 37$. Bij welke van de volgende y -waarden is een lijn getekend?
49 9,5 2,4 1,25 0
- Bij een onderzoek variëren de meetresultaten van 10^3 tot 10^5 . Om deze gegevens op het logaritmisch papier van figuur 9.6 te kunnen uitzetten, zet men op de verticale as 10^3 op de hoogte van de horizontale as en 10^5 bij de bovenste horizontale lijn. Bij de letter A hoort dan het getal 1300. Welke getallen horen in dit geval bij de letters B , C en D ?

65 [**WERKBLAD**] Bij desinfectie worden schadelijke micro-organismen op oppervlakken en voorwerpen verminderd. In de tabel zie je hoe het aantal micro-organismen N tijdens het uitkoken van een medisch instrument afneemt. In deze tabel is t de tijd in minuten dat het uitkoken duurt.



- Teken de punten die uit de tabel volgen op het logaritmisch papier en verbind de getekende punten door lijnstukken.
- Gebruik de grafiek die je in vraag a hebt getekend om het aantal micro-organismen te schatten op $t = 1,5$ en $t = 2,5$.
- Lees af na hoeveel minuten het aantal micro-organismen is teruggebracht tot 100. Geef het antwoord in één decimaal.

t	N
0	100 000
1	15 000
2	2000
3	400
4	50

- Vul de tabel hiernaast in.
- Teken de punten die uit de tabel volgen op het logaritmisch papier. Teken door de punten de grafiek van $N = 4 \cdot 3^t$.
- Teken in dezelfde figuur de grafiek van $N = 5000 \cdot 0,6^t$.
- Wat valt je op aan de grafieken?

t	0	2	4	6
$N = 4 \cdot 3^t$				

Theorie B Exponentiële groei en logaritmisch papier

De grafiek van de formule $N = b \cdot g^t$ is op logaritmisch papier een rechte lijn. In opgave 66 heb je daar enkele voorbeelden van gezien. Als omgekeerd de punten van een grafiek op logaritmisch papier (bij benadering) op een rechte lijn liggen, dan is er sprake van exponentiële groei.

Bij een rechte lijn op logaritmisch papier hoort exponentiële groei, dus een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$.

In het voorbeeld zie je hoe je bij een lijn op logaritmisch papier de formule opstelt. Neem twee punten op de lijn die je goed kunt aflezen, zorg er ook voor dat je punten neemt die niet te dicht bij elkaar liggen. Dat komt de nauwkeurigheid ten goede.

Voorbeeld

Zie figuur 9.7.

Stel de formule op van N .

Rond de beginhoeveelheid af op tientallen.

Uitwerking

Rechte lijn op logaritmisch papier, dus $N = b \cdot g^t$.

Bij $t = 2$ hoort $N = 400$ en bij $t = 6$ hoort $N = 20$.

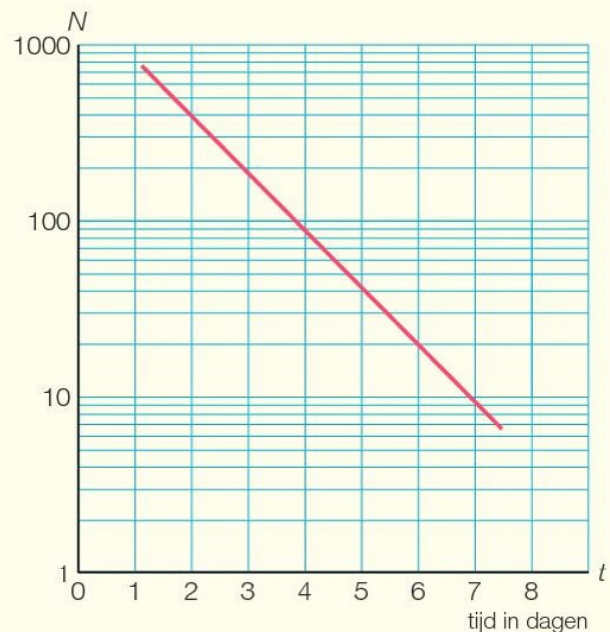
$$g_{4 \text{ dagen}} = \frac{20}{400} = 0,05, \text{ dus}$$

$$g_{\text{dag}} = 0,05^{\frac{1}{4}} = 0,4728\dots$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,4728\dots^t \\ t = 2 \text{ en } N = 400 \end{array} \right\} b \cdot 0,4728\dots^2 = 400$$

$$b = \frac{400}{0,4728\dots^2} \approx 1790$$

Dus $N = 1790 \cdot 0,473^t$.



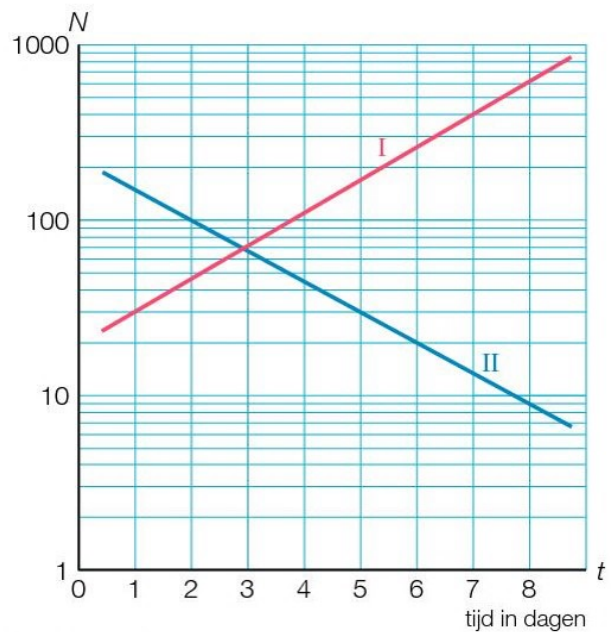
figuur 9.7

67



[▶ WERKBLAD] Zie figuur 9.8.

- Stel de formule op van grafiek I.
- Stel de formule op van grafiek II.
- Grafiek III gaat door het punt (1, 3) en is evenwijdig met grafiek I. Teken grafiek III op het werkblad en stel hiervan de formule op.
- De formule van grafiek IV is $N = 2500 \cdot 0,431^t$. Teken grafiek IV op het werkblad.



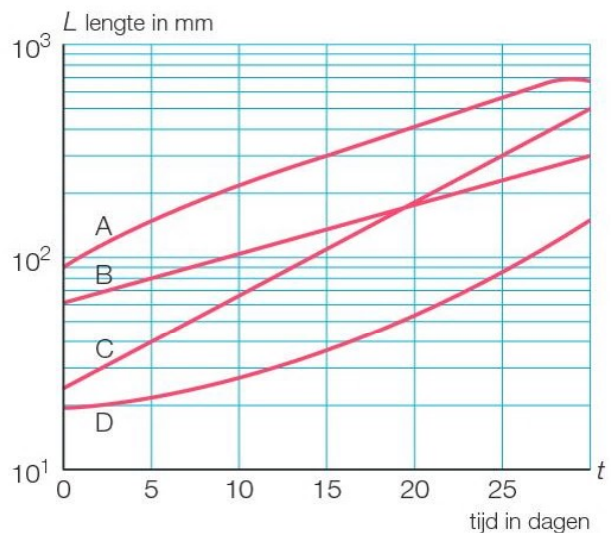
figuur 9.8

68



[▶ WERKBLAD] Van vier planten A, B, C en D is in de maand juni de lengte bijgehouden. De bijbehorende grafieken zijn op logaritmisch papier getekend. Zie figuur 9.9.

- Bij welke planten is sprake van exponentiële groei? Stel van deze planten de formule op van de lengte L in mm na t dagen.
- Plant E groeit exponentieel. Na 5 dagen is de lengte 30 mm en na 25 dagen is de lengte 400 mm. Teken op het werkblad de grafiek van de lengte van plant E.
- Plant F groeit exponentieel met dezelfde groeifactor als plant B en na 10 dagen is de lengte 5 cm. Teken in de figuur van vraag b de grafiek van de lengte van plant F.



figuur 9.9

69



[▶ WERKBLAD] Een vogelwerkgroep heeft in een gebied op de Veluwe in de periode 2001-2015 het aantal patrijzen geteld.

jaar	2001	2003	2004	2006	2007	2010	2012	2015
aantal N	610	455	390	290	250	160	115	75

- Zet de gegevens uit op het logaritmisch papier en toon hiermee aan dat het aantal patrijzen exponentieel afneemt.
- Stel de formule op van het aantal patrijzen N . Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2000.

A70

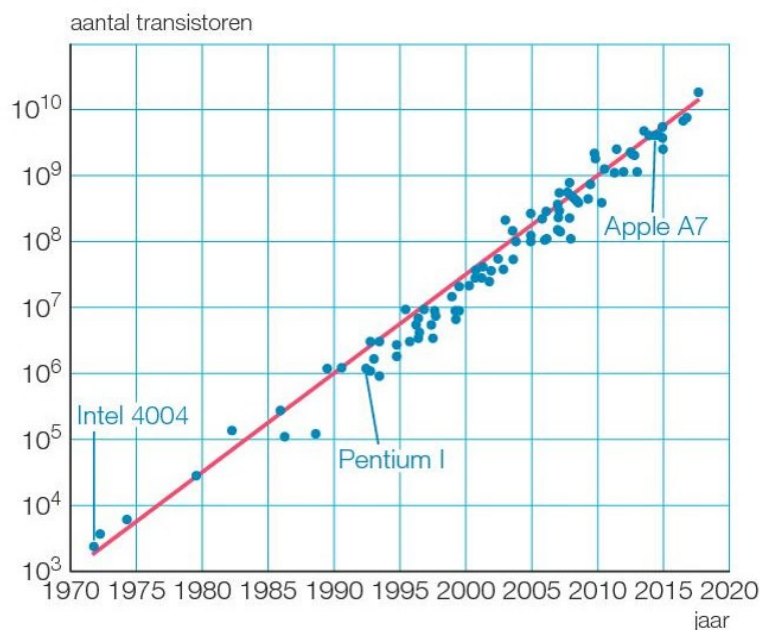

Elke computer gebruikt transistoren om berekeningen te maken. Hoe meer transistoren, hoe sneller de computer. In de begintijd van computers ging het om enkele honderden transistoren per computer. Tegenwoordig zijn dat er vele miljarden, die in zogenaamde microprocessors zijn verwerkt.

In 1965 voorspelde de wetenschapper Gordon Moore dat het aantal transistoren per microprocessor exponentieel zou gaan groeien. Hij gaf een verdubbelingstijd van twee jaar. Deze voorspelling staat bekend als de wet van Moore.

In figuur 9.10 is van enkele microprocessors het aantal transistoren per microprocessor uitgezet tegen het jaar van verschijnen. Verder geeft de lijn een goede indruk van de ontwikkeling tussen 1972 en 2018.

- Laat met een berekening zien dat de lijn in de figuur overeenkomt met de wet van Moore.
- Gebruik een formule van de lijn in de figuur om een voorspelling te doen van het aantal transistoren per microprocessor in 2025.

Geef het antwoord in de wetenschappelijke notatie en rond af op één decimaal.



figuur 9.10

O71

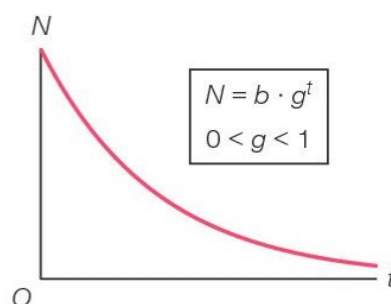

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van $N = b \cdot g^t$ met $0 < g < 1$. De grafiek van N is dalend en N nadert tot 0 als t heel groot wordt.

In deze opgave bekijken we de formule

$$A = 100 - 90 \cdot 0,8^t.$$

Als t heel groot wordt, dan nadert $90 \cdot 0,8^t$ tot 0.

- Hoe volgt hieruit dat $A \approx 100$ als t heel groot wordt?
- Vul in: *toe* of *af*.
 Als t toeneemt, dan neemt $0,8^t$..., dus dan neemt $90 \cdot 0,8^t$..., dus dan neemt $100 - 90 \cdot 0,8^t$...
- Hoe kun je op grond van vraag b concluderen dat de grafiek van A stijgend is?
- Schets de grafiek van A . Gebruik de GR. Neem daarbij x tussen 0 en 20 en y tussen 0 en 100. Is de grafiek inderdaad stijgend?



figuur 9.11

Theorie C Redeneren met groeiformules

In opgave 71 heb je bij de formule van $A = 100 - 90 \cdot 0,8^t$ beredeneerd dat A nadert tot 100 als t heel groot wordt. Je hebt ook beredeneerd dat de grafiek van A stijgend is.

Bij een redenering werk je stap voor stap toe naar een conclusie over de formule of de grafiek, zonder getallenvoorbeelden te gebruiken of de grafiek te plotten.

Je gebruikt bij redeneren met formules met g^t waarbij $0 < g < 1$

- als t heel groot wordt, dan nadert g^t tot 0
- als t toeneemt, dan neemt g^t af.

Bij het beredeneren kom je twee soorten opdrachten tegen. We lichten dit toe aan de hand van de formule $N = 80(1 - 0,9^t)$.

- 1 Beredeneer wat N ongeveer zal zijn als t heel groot wordt.

Uitwerking

Als t heel groot wordt, dan nadert $0,9^t$ tot 0, dus dan wordt $1 - 0,9^t \approx 1$, dus dan wordt $80(1 - 0,9^t) \approx 80$. Hieruit volgt dat $N \approx 80$ als t heel groot wordt.

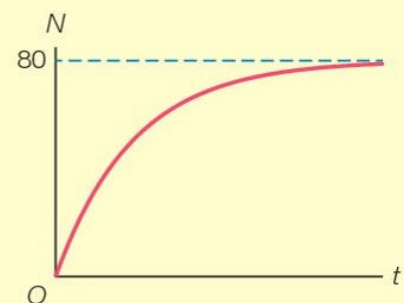
- 2 Beredeneer hoe uit de formule volgt dat de grafiek van N stijgend is.

Als je van 1 iets afhaalt dat kleiner wordt, dan wordt wat je overhoudt groter.

Uitwerking

Als t toeneemt, dan neemt $0,9^t$ af, dus neemt $1 - 0,9^t$ toe, dus dan neemt $80(1 - 0,9^t)$ toe. Dus de grafiek van N is stijgend.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van $N = 80(1 - 0,9^t)$. Met een stippellijn is aangegeven dat de **grenswaarde** gelijk is aan 80. We zeggen ook wel dat 80 het **verzadigingsniveau** is.



figuur 9.12

Ook bij de formule $B = \frac{120}{1 + 0,5 \cdot 1,6^t}$ kun je beredeneren wat de grenswaarde is. Verder kun je beredeneren dat de grafiek van B dalend is.

Je gebruikt bij redeneren met formules met g^t waarbij $g > 1$

- als t heel groot wordt, dan wordt g^t heel groot
- als t toeneemt, dan neemt g^t toe.

Zo krijg je

- 1 Beredeneer wat B ongeveer zal zijn als t heel groot wordt.

Uitwerking

Als t heel groot wordt, dan wordt $1,6^t$ heel groot, dus dan wordt $0,5 \cdot 1,6^t$ heel groot, dus dan wordt

$1 + 0,5 \cdot 1,6^t$ ook heel groot. Dus dan wordt

$\frac{120}{1 + 0,5 \cdot 1,6^t} \approx 0$. Hieruit volgt dat $B \approx 0$ als t heel groot wordt.

Deel je 120 door een heel groot getal, dan krijg je ongeveer 0.

- 2 Beredeneer hoe uit de formule volgt dat de grafiek van B dalend is.

Uitwerking

Als t toeneemt, dan neemt $1,6^t$ toe, dus dan neemt $0,5 \cdot 1,6^t$ toe, dus

dan neemt $1 + 0,5 \cdot 1,6^t$ toe en dan neemt $\frac{120}{1 + 0,5 \cdot 1,6^t}$ af.

Dus de grafiek van B is dalend.

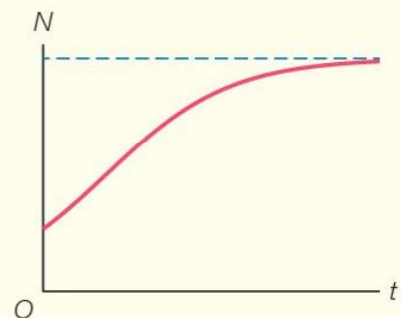
Bij de opgaven in deze paragraaf gaan we er steeds van uit dat $t \geq 0$ is.

Voorbeeld

Het aantal vissen in een meer is gegeven door de formule

$N = \frac{5000}{2 + 5,5 \cdot 0,74^t}$. Hierin is N het aantal vissen en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2010.

- a Beredeneer wat het verzadigingsniveau is.
- b Beredeneer hoe uit de formule volgt dat de grafiek van N stijgend is.



figuur 9.13

Uitwerking

- a Als t heel groot wordt, nadert $0,74^t$ tot 0. Dan wordt $5,5 \cdot 0,74^t \approx 0$

en $2 + 5,5 \cdot 0,74^t \approx 2$. Dus dan wordt $\frac{5000}{2 + 5,5 \cdot 0,74^t} \approx \frac{5000}{2} = 2500$, dus het verzadigingsniveau is 2500 vissen.

- b Als t toeneemt, dan neemt $0,74^t$ af, dus ook $5,5 \cdot 0,74^t$ neemt af, dus ook $2 + 5,5 \cdot 0,74^t$ neemt af, dus

$\frac{5000}{2 + 5,5 \cdot 0,74^t}$ neemt toe.

De grafiek van N is dus stijgend.

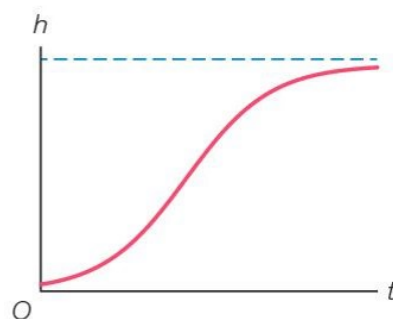
Deel je 5000 door een steeds kleiner positief getal, dan krijg je een steeds grotere uitkomst.

72



Bij de groei van een zonnebloem is de hoogte h gegeven door de formule $h = \frac{260}{1 + 32 \cdot 0,5^t}$. Hierin is h de hoogte in cm en t de tijd in weken.

- Bereken dat uit de formule volgt dat de zonnebloem voortdurend hoger wordt.
- Hoe hoog is de zonnebloem op $t = 3$?
- Bereken wat de grenswaarde is.
- Bereken in één decimaal vanaf welke t de zonnebloem hoger dan 2,5 meter is.



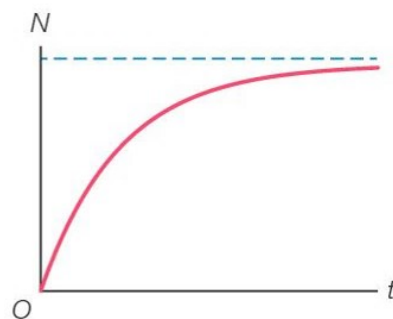
figuur 9.14

73



Belangrijk nieuws verspreidt zich razendsnel in een school. Het aantal leerlingen N dat op een zeker tijdstip t van een belangrijk feit op de hoogte is, wordt gegeven door de formule $N = 1200(1 - 0,7^t)$ met t in uren en $t = 0$ om 9:00 uur.

- Bereken dat uit de formule volgt dat de grafiek van N stijgend is.
- Bij de grafiek van N hoort een lijn die het verzadigingsniveau aangeeft. Welke lijn is dat? Wat is de praktische betekenis van het verzadigingsniveau?
- Hoe laat hebben 950 leerlingen het nieuws gehoord? Rond af op minuten.



figuur 9.15

74



- Bereken bij de formule $N = \frac{500}{20 + 13 \cdot 0,85^t}$ wat het verzadigingsniveau is.
- Bereken aan de hand van de formule dat de grafiek van $N = \frac{2000}{1 + 4 \cdot 0,65^t}$ stijgend is.
- Bereken bij de formule $N = 5 - \frac{0,2}{1,4^t}$ wat de grenswaarde is.
- Bereken hoe uit de formule volgt dat de grafiek van $N = 320(2 - 0,98^t)$ stijgend is.

75



- Gegeven is de formule $N = 8000(1 + 1,5^t)$. Bereken aan de hand van de formule of de grafiek van N stijgend of dalend is.
- Bereken wat de grenswaarde is bij de formule $N = 160 - 50 \cdot 0,8^t$.
- Gegeven is de formule $N = \frac{720}{8 + 2,1 \cdot 1,8^t}$. Bereken aan de hand van de formule of de grafiek van N stijgend of dalend is.
- Gegeven is de formule $N = \frac{10000}{50 + 333 \cdot 0,6^t}$. Bereken wat het verzadigingsniveau is.

A76


Een bioloog doet een onderzoek naar het aantal fruitvliegjes in een afgesloten ruimte. De tijd t is in dagen met $t = 0$ op 1 april om 0:00 uur en N is het aantal fruitvliegjes. De tellingen zijn als punten in figuur 9.16 uitgezet.

- a** Met hoeveel procent is het aantal fruitvliegjes tussen $t = 35$ en $t = 45$ toegenomen?

Tot $t = 30$ gaat de bioloog uit van exponentiële groei met een groeipercentage van 16% per dag.

- b** Bereken, uitgaande van de metingen op $t = 15$ en $t = 25$, het groeipercentage per dag. Rond af op één decimaal.
c Gebruik het groeipercentage 16% om het aantal fruitvliegjes op 23 april om 0:00 uur te berekenen.

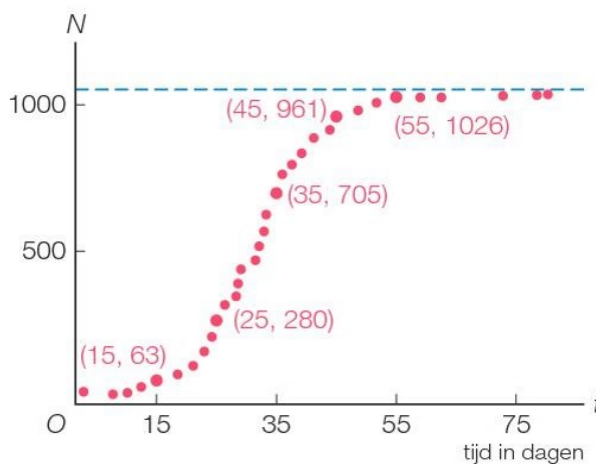
De bioloog benadert het groeiproces met de groeiformule

$$N = \frac{1035}{1 + 210 \cdot 0,84^t}.$$

- d** Hoeveel procent wijkt op $t = 45$ het aantal fruitvliegjes volgens de formule af van de telling van de bioloog?

De bioloog verwacht dat het aantal fruitvliegjes op den duur vrijwel 1035 zal worden.

- e** Beredeneer dat de groeiformule hiermee in overeenstemming is.



figuur 9.16

A77


Hoelang kun je woorden onthouden? Om deze vraag te beantwoorden voerden onderzoekers een experiment uit. Deelnemers kregen een groot aantal woorden in paren te zien. Even later kregen ze als test één van de twee woorden te zien en moesten ze het bijbehorende woord geven. Hoe langer de onderzoekers wachtten met de test, hoe minder woorden de deelnemers zich nog konden herinneren.

De onderzoekers vonden de formule $P = \frac{92}{2,39^t} + \frac{32}{1,04^t} + 10$. Hierin is P het percentage woorden dat correct wordt herinnerd en t de tijd in minuten vanaf het zien van de paren woorden.

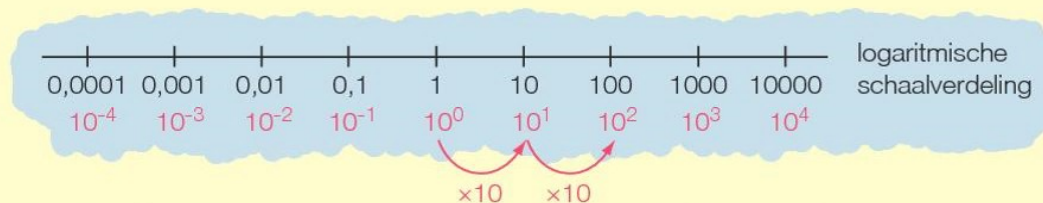
- a** Waarom kan deze formule niet gelden voor $t = 0,5$?
b Hoelang duurt het tot de helft van de woorden nog correct wordt herinnerd? Rond af op gehele seconden.
c Beredeneer wat de grenswaarde is van deze formule. Wat is hiervan de praktische betekenis?
d De formule is te schrijven in de vorm $P = 92 \cdot a^t + 32 \cdot b^t + 10$. Bereken a en b . Rond af op drie decimalen.

Terugblik

Logaritmische schaalverdeling en logaritmisch papier

Bij een logaritmische schaalverdeling zit er tussen de getallen $10^0 = 1$ en $10^1 = 10$ evenveel afstand als tussen de getallen $10^1 = 10$ en $10^2 = 100$.

Bij een vaste stapgrootte hoort bij een logaritmische schaalverdeling dus een vaste factor.

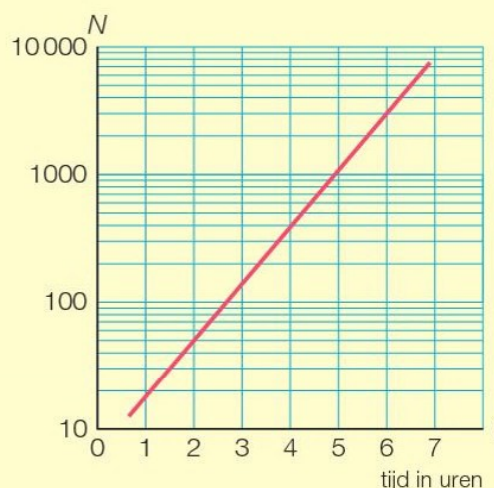


Een voordeel van een logaritmische schaalverdeling is dat je waarnemingen kunt uitzetten die sterk in grootte verschillen.

Bij logaritmisch papier is op de ene as een logaritmische schaalverdeling aangebracht. Op de andere as staat een gewone schaalverdeling. De grafiek hiernaast gaat door de punten (2, 50) en (6, 3000).

Op logaritmisch papier is de grafiek van $N = b \cdot g^t$ een rechte lijn.

Zet je gegevens uit op logaritmisch papier en liggen deze punten (vrijwel) op een rechte lijn, dan weet je dat de gegeven punten (bij benadering) bij exponentiële groei horen.



Redeneren met groeiformules

Gegeven is de formule $N = \frac{150}{3 + 20 \cdot 0,6^t}$. In de figuur hiernaast geeft de stippellijn het verzadigingsniveau aan. Met de formule kun je als volgt beredeneren dat het verzadigingsniveau 50 is.

Als t heel groot wordt, nadert $0,6^t$ tot 0. Dan wordt $20 \cdot 0,6^t \approx 0$ en $3 + 20 \cdot 0,6^t \approx 3$. Dus dan wordt

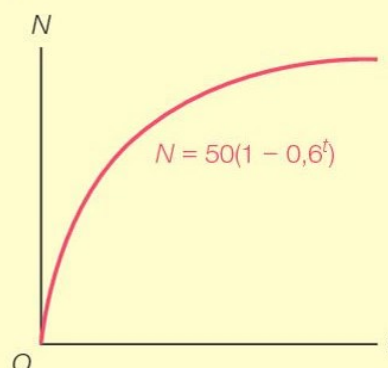
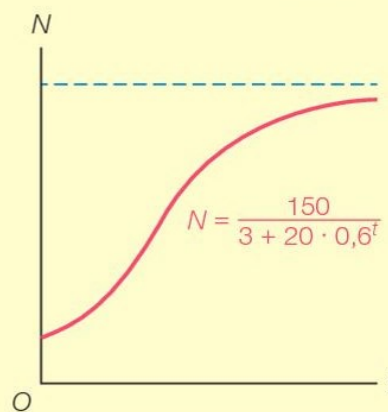
$$\frac{150}{3 + 20 \cdot 0,6^t} \approx \frac{150}{3} = 50, \text{ dus het verzadigingsniveau is } 50.$$

Gegeven is de formule $N = 50(1 - 0,6^t)$. Zie de figuur hiernaast.

Met de formule kun je als volgt beredeneren dat de grafiek stijgend is.

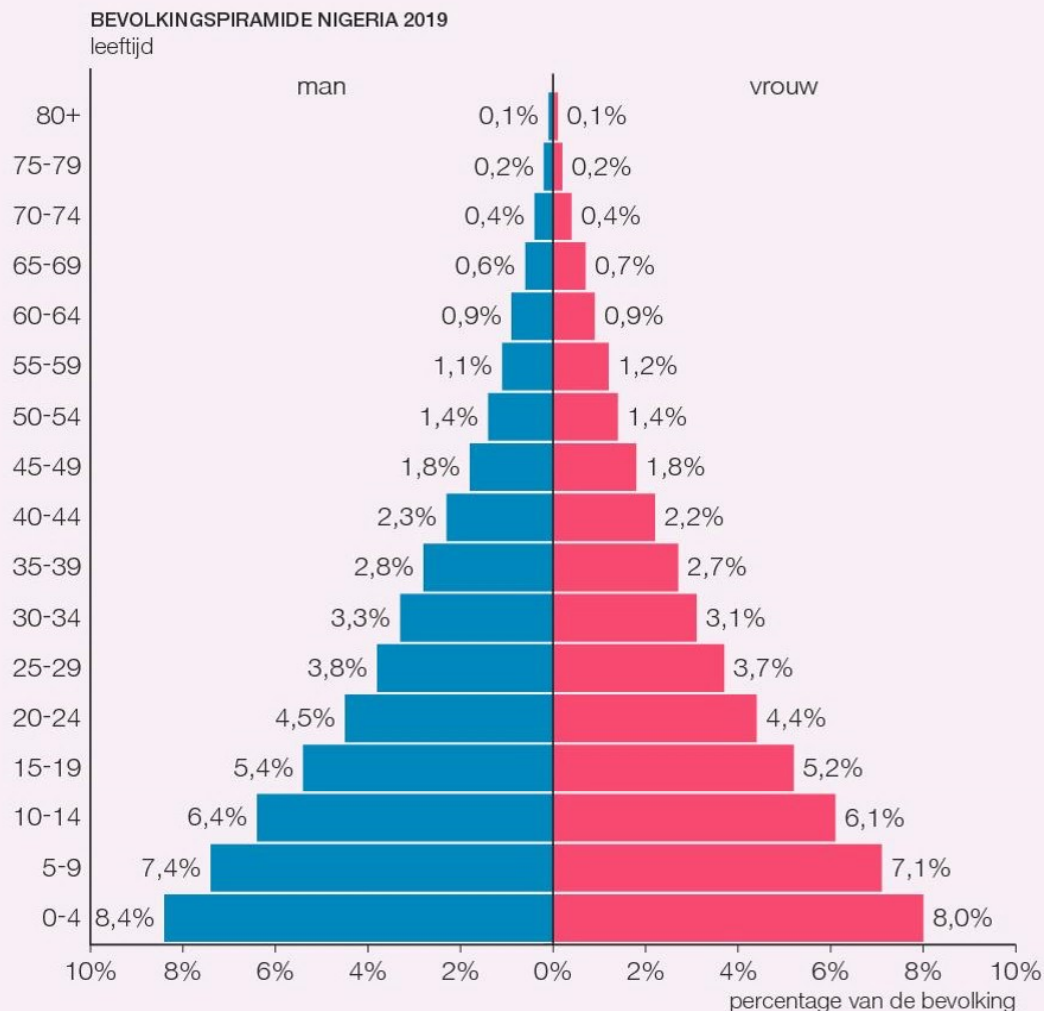
Als t toeneemt, dan neemt $0,6^t$ af, dus neemt $1 - 0,6^t$ toe, dus dan neemt $50(1 - 0,6^t)$ toe.

De grafiek van N is dus stijgend.



Eindopdracht Bevolkingsgroei in Nigeria

In de figuur hieronder zie je de bevolkingspiramide van Nigeria.



figuur 9.17

We nemen aan dat alleen de vrouwen in de leeftijdscategorie 20-39 jaar kinderen krijgen en dat het vruchtbaarheidscijfer in Nigeria 5 is. Dat betekent dat deze vrouwen gemiddeld 5 kinderen krijgen.

Ook nemen we aan dat voor de komende 20 jaar het volgende geldt:

- alle mensen van de leeftijdscategorie 80+ zijn overleden
- in de leeftijdscategorie 60-79 jaar is 80% overleden
- in de leeftijdscategorie 40-59 jaar is 40% overleden
- in van de leeftijdscategorie 20-39 jaar is 10% overleden
- in de leeftijdscategorie 0-19 jaar is 5% overleden.

Ten slotte nemen we aan dat de bevolking van Nigeria exponentieel toeneemt.

- Geef met deze aannamen en gegevens een schatting van de verdubbelingstijd van de bevolking van Nigeria.

Diagnostische toets

9.1 Lineaire en exponentiële groei

- 1** **a** Een hoeveelheid M groeit lineair. Op $t = 6$ is $M = 156$ en op $t = 10$ is $M = 211$.
Stel de formule op van M .
- b** De hoeveelheid N neemt toe met een factor 1,083 per jaar. Op $t = 0$ is $N = 190$.
Stel de formule op van N .
- 2** In de tabel staan gegevens over de bevolking in West-Afrika in miljoenen inwoners.
- a** Toon aan dat bij de tabel exponentiële groei hoort.
- b** Stel de formule op van N . Neem de tijd t in tientallen jaren met $t = 0$ in 1980 en rond de groeifactor af op twee decimalen.
- c** Volgens een prognose zal de bevolking in West-Afrika in het jaar 2050 ongeveer 796 miljoen zijn.
Komt dit overeen met de formule die je bij vraag b hebt gevonden? Licht toe.

BEVOLKING

jaar	aantal N
1980	137
1990	179
2000	235
2010	308
2020	403

- 3** De formules $N_1 = \frac{200}{3 \cdot 0,9^t}$ en $N_2 = \frac{3000}{15 \cdot 1,12^t}$ horen bij exponentiële groei.
- a** Bereken van N_1 en N_2 de beginwaarde en de groeifactor. Rond de beginwaarde zo nodig af op gehelen en de groeifactor op drie decimalen.
- b** Welke soort van stijgen of dalen hoort bij de grafiek van N_1 ? En bij de grafiek van N_2 ?

9.2 Groeipercenages

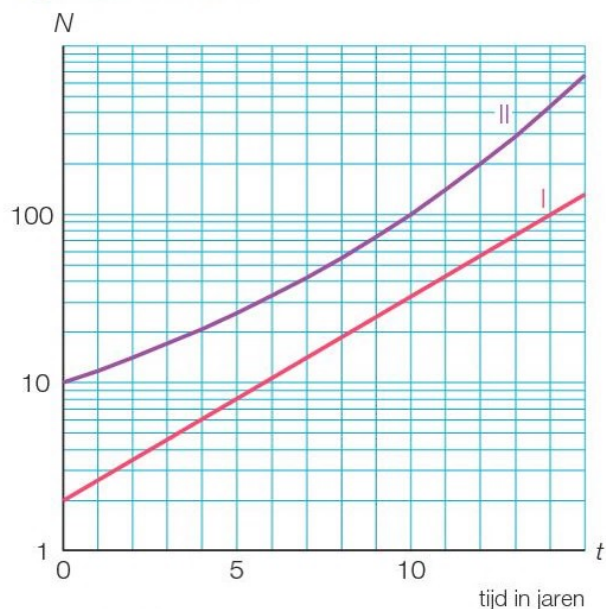
- 4** Een hoeveelheid N neemt met 0,3% per jaar toe. Op $t = 0$ is $N = 2400$.
- a** Stel de formule van N op. Neem t in jaren.
- b** Vanaf welke gehele waarde van t is N groter dan 2700?
- 5** **a** Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 15,5% toe.
Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig.
- b** Een hoeveelheid verdubbelt elke 21 jaar.
Bereken het groeipercenage per jaar.
- 6** **a** Een hoeveelheid neemt per uur met 12% af.
Bereken de halveringstijd in minuten nauwkeurig.
- b** Een hoeveelheid heeft een halveringstijd van 7,8 dagen.
Bereken de groeifactor per dag. Rond af op drie decimalen.
- c** Gegeven is de formule $N = 195 \cdot 0,975^t$. Hierin is t de tijd in jaren.
Bereken de halveringstijd in jaren. Rond af op één decimaal.

9.3 Formules bij exponentiële groei

- 7** Een hoeveelheid neemt per dag met 36% toe.
- Bereken het groeipercentage per week. Rond af op gehele.
 - Bereken het groeipercentage per uur.
- 8** Bij een exponentiële afname hoort een groeifactor van 0,75 per tien jaar.
- Hoeveel procent is de afname per jaar?
 - Hoeveel procent is de afname per 25 jaar?
- 9** Een hoeveelheid N neemt exponentieel af. Op $t = 4$ is $N = 1500$ en op $t = 7$ is $N = 1200$. Hierbij is t de tijd in dagen. Stel de formule van N op.
- 10** In de populaire Marvelfilms verschijnen in de loop der jaren steeds meer personages. Om deze toename te bepalen hebben onderzoekers alle interacties tussen personages in Marvelfilms in kaart gebracht. Op basis van deze analyse konden ze voor elke Marvelfilm het aantal belangrijke personages berekenen. In 2008 waren dit er gemiddeld 8,1 per film en in 2019 al 14,4. De toename bleek exponentieel te zijn.
- Stel de formule op van het aantal belangrijke personages P per Marvelfilm. Neem de tijd t in jaren, met $t = 0$ in 2008.
 - Bereken in welk jaar er voor het eerst meer dan 20 belangrijke personages in een Marvelfilm zullen optreden, als de genoemde groei doorzet.

9.4 Logaritmisch papier en redeneren met groeiformules

- 11** [▶ WERKBLAD] Zie figuur 9.18.
- Een van de getekende grafieken hoort bij een exponentieel verband. Stel bij deze grafiek de formule op.
 - Gegeven is de formule $N = 800 \cdot 0,736^t$. Teken de grafiek van N op het werkblad.
- 12** Gegeven is de formule $N = \frac{5000}{200 + 12 \cdot 0,78^t}$.
- Beredeneer aan de hand van de formule of de grafiek van N stijgend of dalend is.
 - Beredeneer wat het verzadigingsniveau is.



figuur 9.18